

# Combinando jogos simultâneos e sequenciais

Roberto Guena de Oliveira

USP

15 de setembro de 2011

# Sumário

**1 Representações nas formas estratégicas e extensiva**

**2 Jogos sequenciais e estratégias mistas**

**3 Mudando as regras**

- Convertendo jogos sequenciais em simultâneos
- Convertendo um jogo de simultâneo para sequencial

**4 Solução do jogo sequencial na forma estratégica**

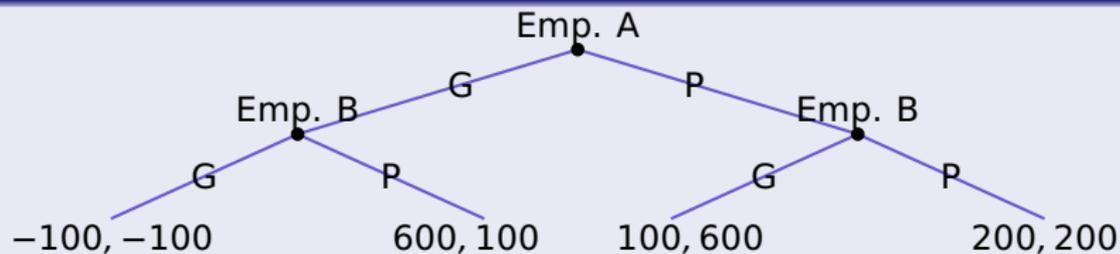
**5 Equilíbrio perfeito de subjogos**

# Sumário

- 1 Representações nas formas estratégicas e extensiva**
- 2 Jogos sequenciais e estratégias mistas
- 3 Mudando as regras
- 4 Solução do jogo sequencial na forma estratégica
- 5 Equilíbrio perfeito de subjogos

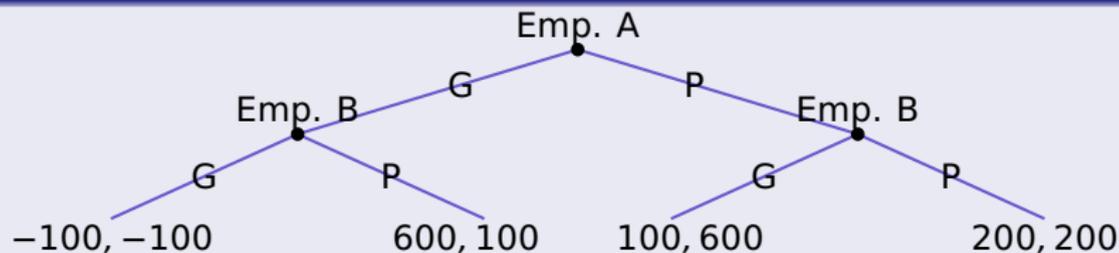
# Jogo sequencial na forma estratégica

## Representação na forma extensiva



# Jogo sequencial na forma estratégica

## Representação na forma extensiva



## Representação na forma estratégica

		Empresa B			
		GG	GP	PG	PP
Emp. A	G	-100, -100	-100, -100	600, 100	600, 100
	P	100, 600	200, 200	100, 600	200, 200

# Jogo simultâneo na forma extensiva

## Representação estratégica

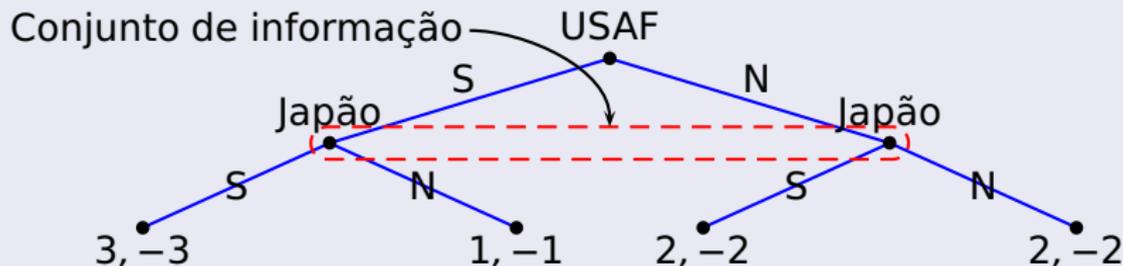
		Marinha Japonesa	
		Norte	Sul
USAF	Norte	2	2
	Sul	1	3

# Jogo simultâneo na forma extensiva

## Representação estratégica

		Marinha Japonesa	
		Norte	Sul
USAF	Norte	2	2
	Sul	1	3

## Representação extensiva



# Um jogo com movimentações simultâneas e sequeciais

Duas empresas, Kumquat e Kiwifruit, competem com produtos similares em um jogo de duas rodadas. Na primeira rodada, elas devem decidir simultaneamente se fazem um gasto grande (G) ou pequeno (P) em P&D. Na segunda rodada, com informação sobre o que cada uma delas fez na primeira rodada, elas decidem simultaneamente se praticam preço alto (A) ou baixo (B).



# Sumário

- 1 Representações nas formas estratégicas e extensiva
- 2 Jogos sequenciais e estratégias mistas**
- 3 Mudando as regras
- 4 Solução do jogo sequencial na forma estratégica
- 5 Equilíbrio perfeito de subjogos

# Exemplo 1: futebol americano

O time que ataca precisa ganhar 20 jardas em dois Down's restantes. O técnico do ataque tem duas jogadas para essa situação: uma que avançará 10 jardas se bem sucedida e outra que resultará em um avanço de 20 jardas, se bem sucedida. Ele deve escolher a jogada de cada down. Sabendo disso, o técnico da defesa deve escolher, simultaneamente, se seu time se prepara para defender a jogada de 10 jardas ou a jogada de 20 jardas.

# Exemplo 1 (continuação...)

## Probabilidades de sucesso

		Defesa	
		10	20
Ataque	10	$\frac{4}{5}$	1
	20	1	$\frac{1}{2}$

# Exemplo 1 (continuação...)

Quarto down com 20 jardas faltando

## Payoffs esperado do ataque

		Defesa	
		10	20
Ataque	10	0	0
	20	1	$\frac{1}{2}$

## Equilíbrio de Nash

- Ataque joga 20
- Defesa joga 20
- Payoff esperado para Ataque =  $\frac{1}{2}$ .

# Exemplo 1 (continuação...)

Quarto down com 20 jardas faltando

## Payoffs esperado do ataque

		Defesa	
		10	20
Ataque	10	0	0
	20	1	$\frac{1}{2}$

## Equilíbrio de Nash

- Ataque joga 20
- Defesa joga 20
- Payoff esperado para Ataque =  $\frac{1}{2}$ .

# Exemplo 1 (*continuação...*)

Quarto down com 10 jardas faltando

## Payoff esperado para o ataque

		Defesa	
		10	20
Ataque	10	$\frac{4}{5}$	1
	20	1	$\frac{1}{2}$

# Exemplo 1 (continuação...)

Quarto down com 10 jardas faltando

## Payoff esperado para o ataque

		Defesa	
		10	20
Ataque	10	$\frac{4}{5}$	1
	20	1	$\frac{1}{2}$

## Equilíbrio de Nash

- Ataque joga 10 com probabilidade  $\frac{5}{7}$ .
- Defesa joga 10 com probabilidade  $\frac{5}{7}$ .
- Payoff esperado do ataque é  $\frac{6}{7}$ .

# Exemplo 1 (*continuação...*): Terceiro down

## Payoff esperado para o ataque

		Defesa	
		10	20
Ataque	10	$11/14$	$6/7$
	20	$1$	$3/4$

## Equilíbrio de Nash

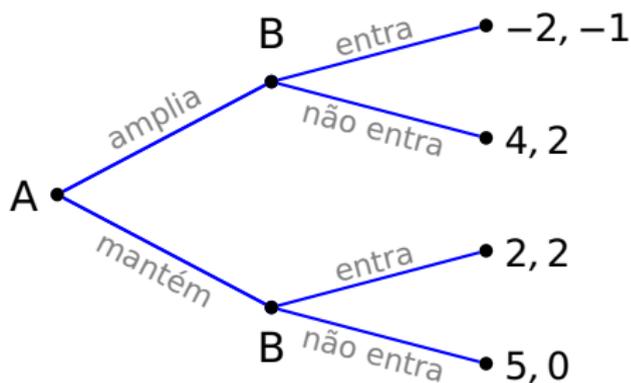
- Ataque joga 10 com probabilidade  $7/9$
- Defesa joga 10 com probabilidade  $1/3$
- Payoff esperado do ataque é  $1/3$

# Sumário

- 1 Representações nas formas estratégicas e extensiva
- 2 Jogos sequenciais e estratégias mistas
- 3 Mudando as regras**
  - Convertendo jogos sequenciais em simultâneos
  - Convertendo um jogo de simultâneo para sequencial
- 4 Solução do jogo sequencial na forma estratégica
- 5 Equilíbrio perfeito de subjogos

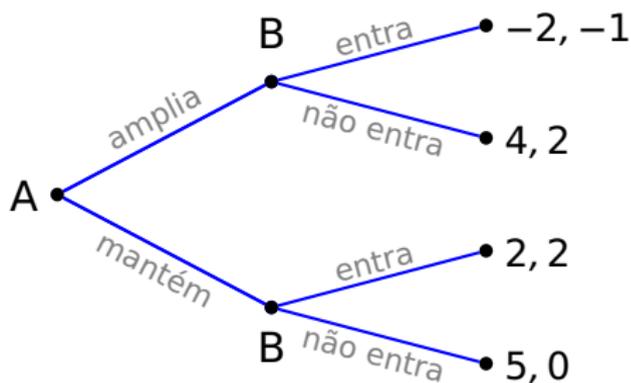
## Exemplo 2

- A empresa A é a única vendedora em determinado mercado e deve decidir se amplia ou mantém sua capacidade produtiva.
- A empresa B cogita em entrar nesse mercado e deve tomar sua decisão após observar a decisão da empresa A.



## Exemplo 2

- A empresa A é a única vendedora em determinado mercado e deve decidir se amplia ou mantém sua capacidade produtiva.
- A empresa B cogita em entrar nesse mercado e deve tomar sua decisão após observar a decisão da empresa A.



- Equilíbrio por reversão: empresa A amplia e empresa B não entra.

## Exemplo 3 (*continuação...*): o mesmo jogo com movimentos simultâneos

		Empresa B	
		entra	não entra
Empresa A	amplia	-2, -1	4, 2
	mantém	2, 2	5, 0

- manter é estratégia dominante para empresa A.
- o equilíbrio de Nash ocorre quando a empresa A mantém a capacidade e a empresa B entra.

# Sumário

- 1 Representações nas formas estratégicas e extensiva
- 2 Jogos sequenciais e estratégias mistas
- 3 Mudando as regras**
  - Convertendo jogos sequenciais em simultâneos
  - Convertendo um jogo de simultâneo para sequencial
- 4 Solução do jogo sequencial na forma estratégica
- 5 Equilíbrio perfeito de subjogos

## Exemplo 4

Vimos que o jogo

		Empresa B	
		entra	não entra
Empresa A	amplia	-2, -1	4, 2
	mantém	2, 2	5, 0

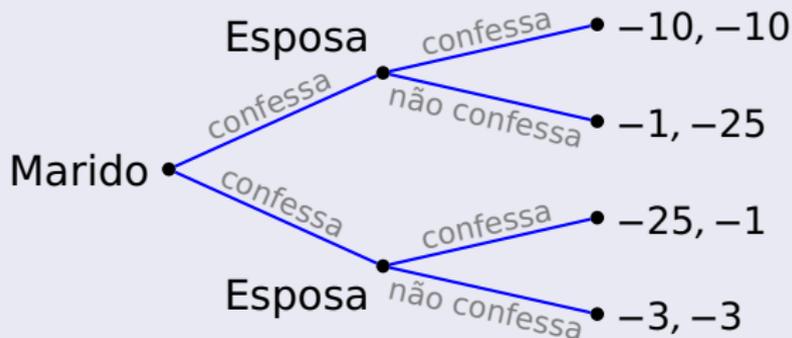
tem, como equilíbrio de Nash, (mantém, entra). Porém, caso a empresa A movimente-se primeiro, o equilíbrio por reversão será (amplia, (não entra, entra)). É vantagem para a empresa A mover primeiro.

# Exemplo 5

## Dilema dos prisioneiros

		Esposa	
		Confessa	Não confessa
Marido	Confessa	-10, -10	-1, -25
	Não Confessa	-25, -1	-3, -3

## Jogo quando o marido joga primeiro



# Sumário

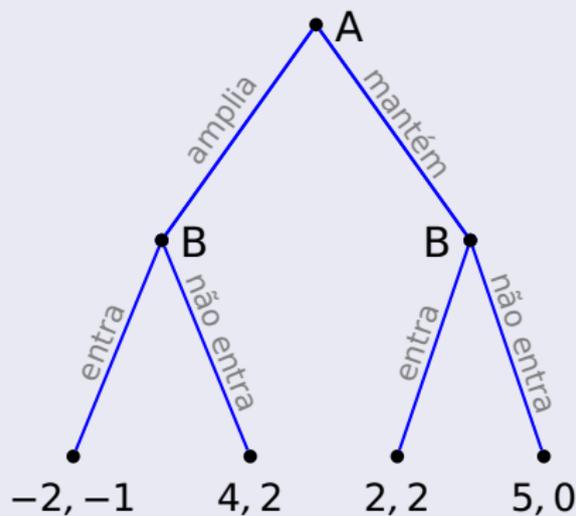
- 1 Representações nas formas estratégicas e extensiva
- 2 Jogos sequenciais e estratégias mistas
- 3 Mudando as regras
- 4 Solução do jogo sequencial na forma estratégica**
- 5 Equilíbrio perfeito de subjogos

# Princípio geral

- Considere um jogo sequencial.
- Como, na solução reversa, o último jogador escolhe a estratégia que dá a melhor resposta para cada possível movimentação dos outros jogadores, sabemos que, nessa solução, o último jogador **nunca** joga uma estratégia dominada.
- Analogamente, por solução reversa, o penúltimo jogador nunca jogará uma estratégia dominada após a eliminação das estratégias dominadas do último jogador, etc.
- Assim, o equilíbrio por reversão é obtido ao se eliminar recursivamente estratégias dominadas, em ordem reversa, do último ao primeiro jogador.

# Exemplo 6

## Forma extensiva



## Estratégias

### Empresa A

amplia : (A)

mantém : (M)

### Empresa B

entra e entra : (EE)

entra e não entra : (EF)

não entra e entra : (FE)

não entra e não entra : (FF)

# Exemplo 6 (continuação): Forma estratégica

		Empresa B			
		EE	EF	FE	FF
Empresa A	Amplia	-2, -1	-2, -1	4, 2	4, 2
	Mantém	2, 2	5, 0	2, 2	5, 0

# Exemplo 6 (continuação): Forma estratégica

		Empresa B			
		EE	EF	FE	FF
Empresa A	Amplia	-2, -1	-2, -1	4, 2	4, 2
	Mantém	2, 2	5, 0	2, 2	5, 0

# Exemplo 6 (continuação): Forma estratégica

		Empresa B			
		EE	EF	FE	FF
Empresa A	Amplia	-2, -1	-2, -1	4, 2	4, 2
	Mantém	2, 2	5, 0	2, 2	5, 0

# Exemplo 6 (continuação): Forma estratégica

		Empresa B			
		EE	EF	FE	FF
Empresa A	Amplia	-2, -1	-2, -1	4, 2	4, 2
	Mantém	2, 2	5, 0	2, 2	5, 0

# Exemplo 6 (continuação): Forma estratégica

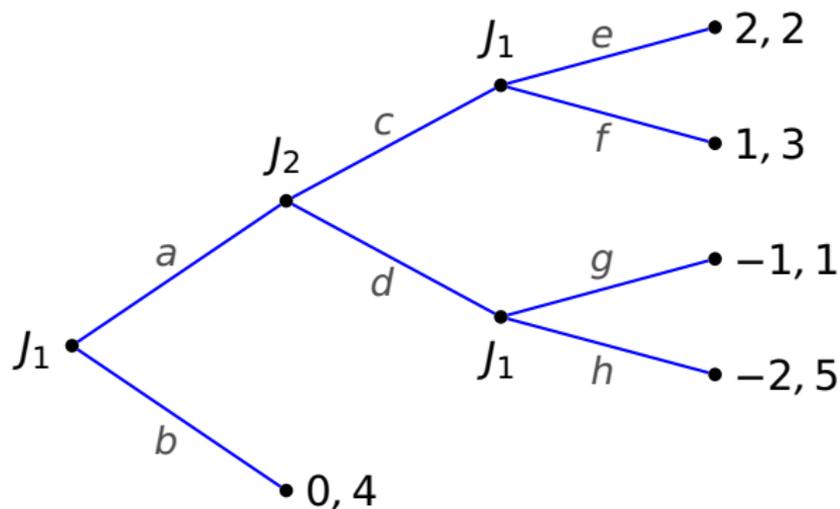
		Empresa B			
		EE	EF	FE	FF
Empresa A	Amplia	-2, -1	-2, -1	4, 2	4, 2
	Mantém	2, 2	5, 0	2, 2	5, 0

# Exercício

Considere um jogo igual ao do exemplo 6 com exceção do fato de que a primeira empresa a se mover é a empresa B.

- 1 Represente esse jogo na forma extensiva e encontre o equilíbrio por reversão.
- 2 Represente esse jogo na forma estratégica e encontre o equilíbrio por reversão através da eliminação sucessiva de estratégias dominadas.

# Exemplo 7



# Exemplo 7 (continuação): representação estratégica

		$J_2$	
		$c$	$d$
$J_1$	$a, eg$	2, 2	-1, 1
	$a, eh$	2, 2	-2, 5
	$a, fg$	1, 3	-1, 1
	$a, fh$	1, 3	-2, 5
	$b, eg$	0, 4	0, 4
	$b, eh$	0, 4	0, 4
	$b, fg$	0, 4	0, 4
	$b, fh$	0, 4	0, 4

# Exemplo 7 (continuação): representação estratégica

		$J_2$	
		$c$	$d$
$J_1$	$a, eg$	2, 2	-1, 1
	$a, eh$	2, 2	-2, 5
	$a, fg$	1, 3	-1, 1
	$a, fh$	1, 3	-2, 5
	$b, eg$	0, 4	0, 4
	$b, eh$	0, 4	0, 4
	$b, fg$	0, 4	0, 4
	$b, fh$	0, 4	0, 4

# Exemplo 7 (continuação): representação estratégica

		$J_2$	
		$c$	$d$
$J_1$	$a, eg$	2, 2	-1, 1
	$a, eh$	2, 2	-2, 5
	$a, fg$	1, 3	-1, 1
	$a, fh$	1, 3	-2, 5
	$b, eg$	0, 4	0, 4
	$b, eh$	0, 4	0, 4
	$b, fg$	0, 4	0, 4
	$b, fh$	0, 4	0, 4

# Exemplo 7 (continuação): representação estratégica

		$J_2$	
		$c$	$d$
$J_1$	$a, eg$	2, 2	-1, 1
	$a, eh$	2, 2	-2, 5
	$a, fg$	1, 3	-1, 1
	$a, fh$	1, 3	-2, 5
	$b, eg$	0, 4	0, 4
	$b, eh$	0, 4	0, 4
	$b, fg$	0, 4	0, 4
	$b, fh$	0, 4	0, 4

# Exemplo 7 (continuação): representação estratégica

		$J_2$	
		$c$	$d$
$J_1$	$a, eg$	2, 2	-1, 1
	$a, eh$	2, 2	-2, 5
	$a, fg$	1, 3	-1, 1
	$a, fh$	1, 3	-2, 5
	$b, eg$	0, 4	0, 4
	$b, eh$	0, 4	0, 4
	$b, fg$	0, 4	0, 4
	$b, fh$	0, 4	0, 4

# Exemplo 7 (continuação): representação estratégica

		$J_2$	
		$c$	$d$
$J_1$	$a, eg$	2, 2	-1, 1
	$a, eh$	2, 2	-2, 5
	$a, fg$	1, 3	-1, 1
	$a, fh$	1, 3	-2, 5
	$b, eg$	0, 4	0, 4
	$b, eh$	0, 4	0, 4
	$b, fg$	0, 4	0, 4
	$b, fh$	0, 4	0, 4

# Exemplo 7 (continuação): forma reduzida

		$J_2$	
		$c$	$d$
$J_1$	$a, eg$	2, 2	-1, 1
	$a, eh$	2, 2	-2, 5
	$a, fg$	1, 3	-1, 1
	$a, fh$	1, 3	-2, 5
	$e$	0, 4	0, 4

# Exemplo 7 (continuação): forma reduzida

		$J_2$	
		$c$	$d$
$J_1$	$a, eg$	2, 2	-1, 1
	$a, eh$	2, 2	-2, 5
	$a, fg$	1, 3	-1, 1
	$a, fh$	1, 3	-2, 5
	$e$	0, 4	0, 4

# Exemplo 7 (continuação): forma reduzida

		$J_2$	
		$c$	$d$
$J_1$	$a, eg$	2, 2	-1, 1
	$a, eh$	2, 2	-2, 5
	$a, fg$	1, 3	-1, 1
	$a, fh$	1, 3	-2, 5
	$e$	0, 4	0, 4

# Exemplo 7 (continuação): forma reduzida

		$J_2$	
		$c$	$d$
$J_1$	$a, eg$	2, 2	-1, 1
	$a, eh$	2, 2	-2, 5
	$a, fg$	1, 3	-1, 1
	$a, fh$	1, 3	-2, 5
	$e$	0, 4	0, 4

# Exemplo 7 (continuação): forma reduzida

		$J_2$	
		$c$	$d$
$J_1$	$a, eg$	2, 2	-1, 1
	$a, eh$	2, 2	-2, 5
	$a, fg$	1, 3	-1, 1
	$a, fh$	1, 3	-2, 5
	$e$	0, 4	0, 4

# Exemplo 7 (continuação): forma reduzida

		$J_2$	
		$c$	$d$
$J_1$	$a, eg$	2, 2	-1, 1
	$a, eh$	2, 2	-2, 5
	$a, fg$	1, 3	-1, 1
	$a, fh$	1, 3	-2, 5
	$e$	0, 4	0, 4

# Sumário

1 Representações nas formas estratégicas e extensiva

2 Jogos sequenciais e estratégias mistas

3 Mudando as regras

- Convertendo jogos sequenciais em simultâneos
- Convertendo um jogo de simultâneo para sequencial

4 Solução do jogo sequencial na forma estratégica

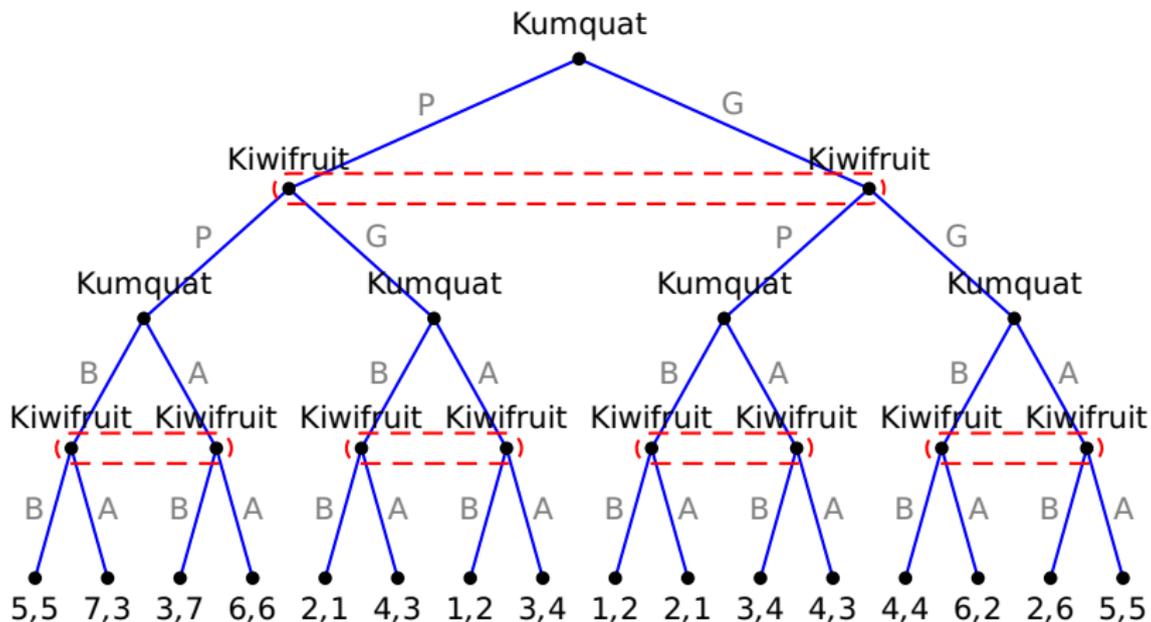
5 Equilíbrio perfeito de subjogos

# Subjogos

Um subjogo é uma parte de um jogo na forma extensiva que:

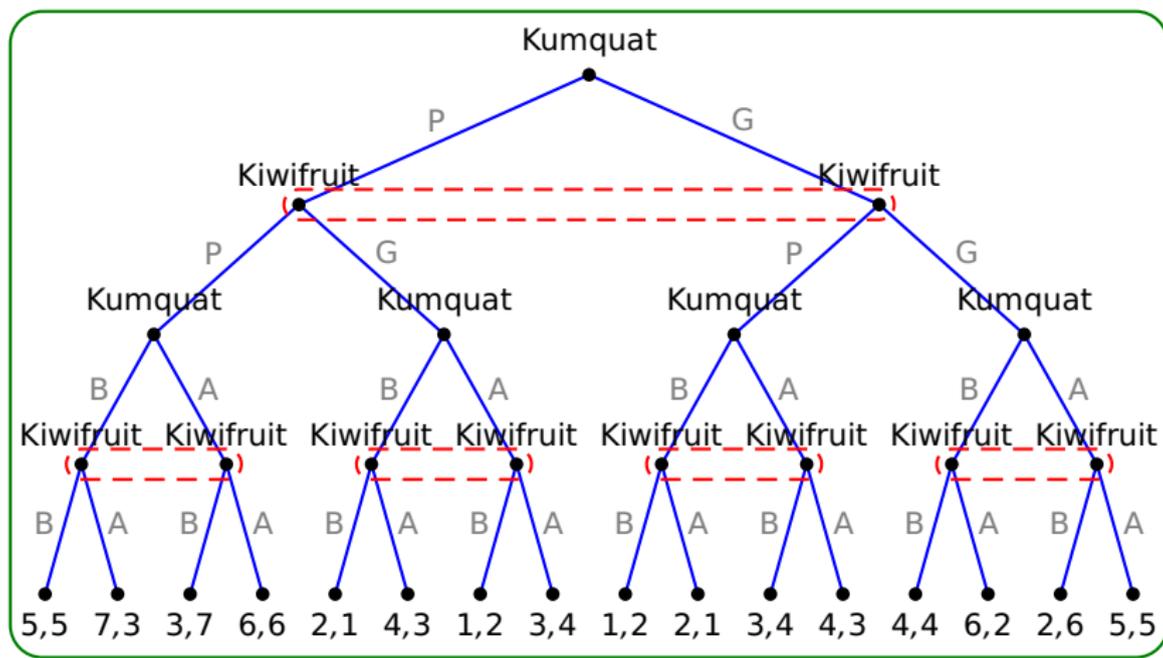
- 1 Começa em um nó decisório que é o único elemento do conjunto de informação ao qual pertence.
- 2 Contém todos os nós que sucedem qualquer um de seus nós.
- 3 Caso dois nós pertençam ao mesmo conjunto de informação e um dos nós pertence ao subjogo, então o outro nó também pertence ao subjogo.

## Exemplo 8



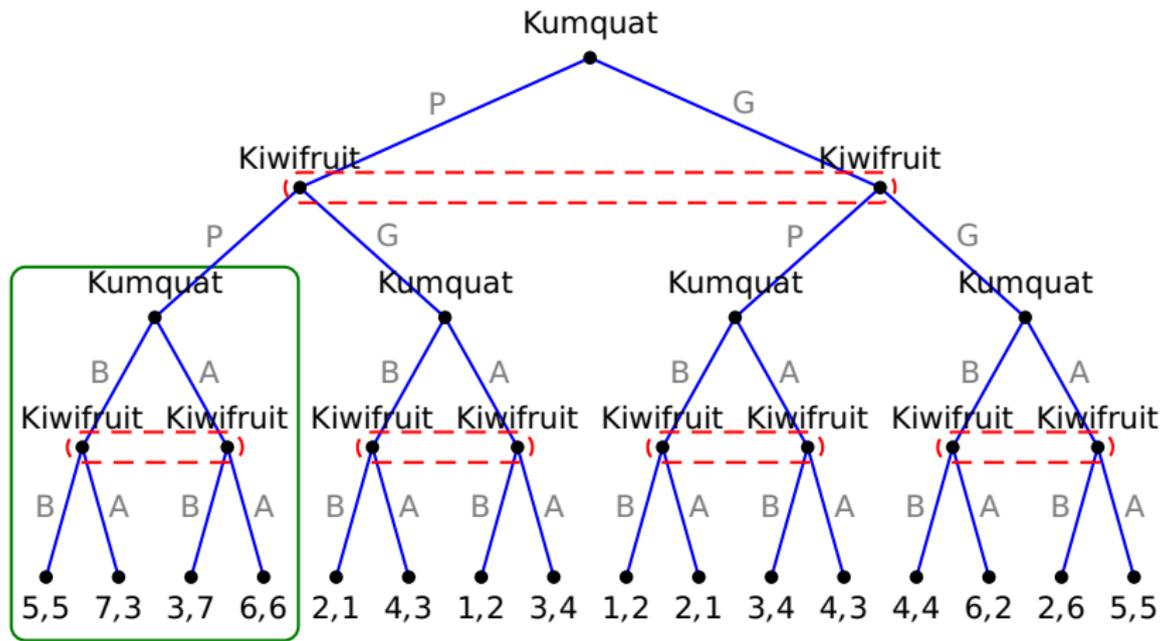
# Exemplo 8

## Subjogo 1



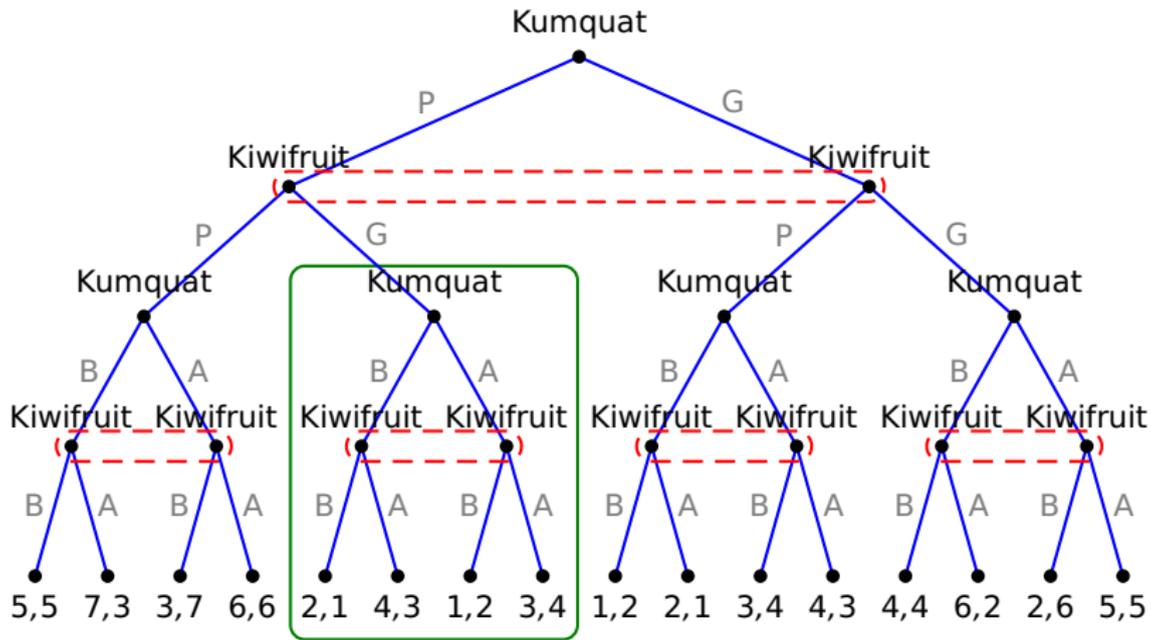
# Exemplo 8

## Subjogo 2



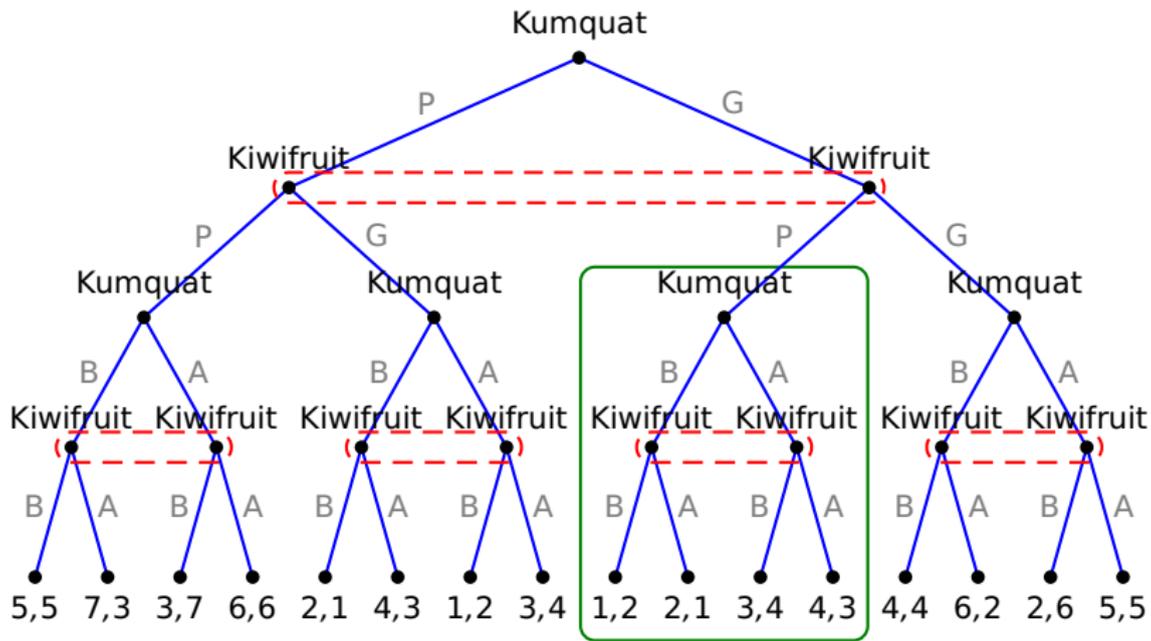
# Exemplo 8

## Subjogo 3



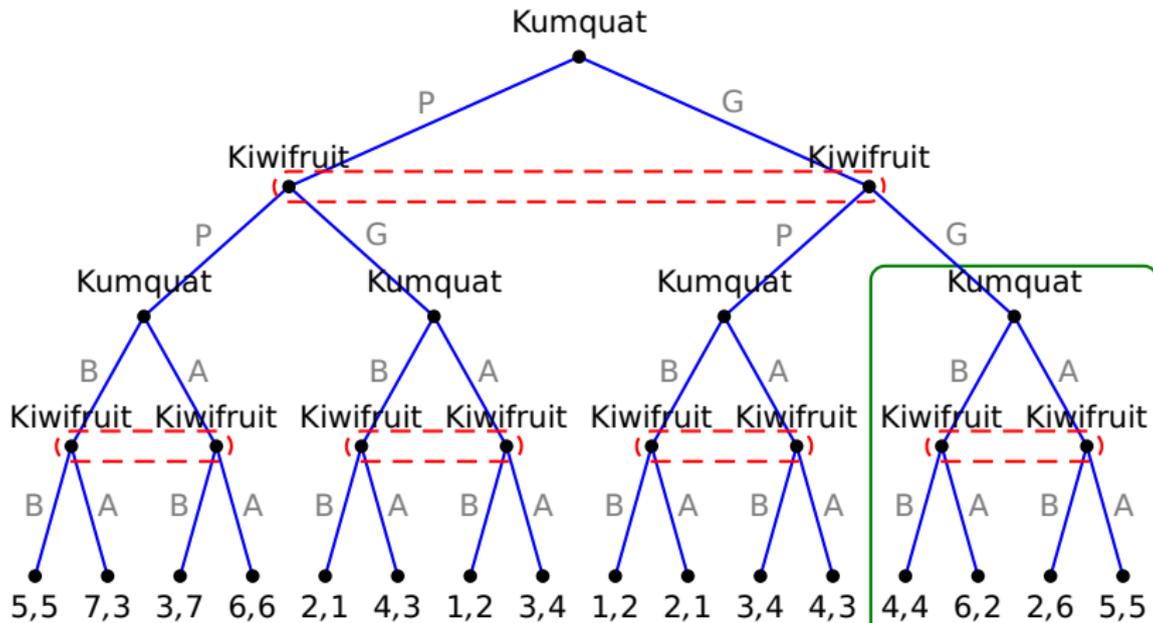
# Exemplo 8

## Subjogo 4



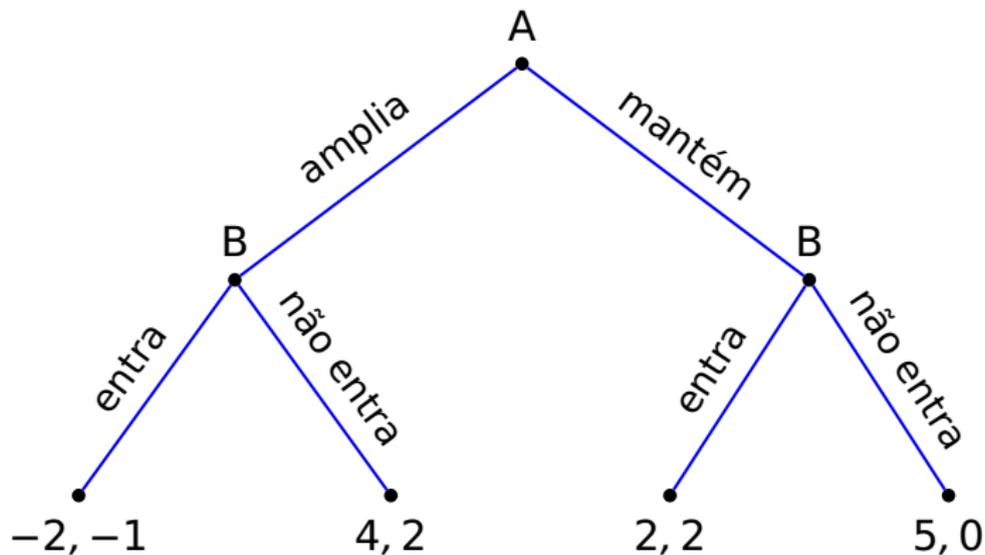
# Exemplo 8

## Subjogo 5



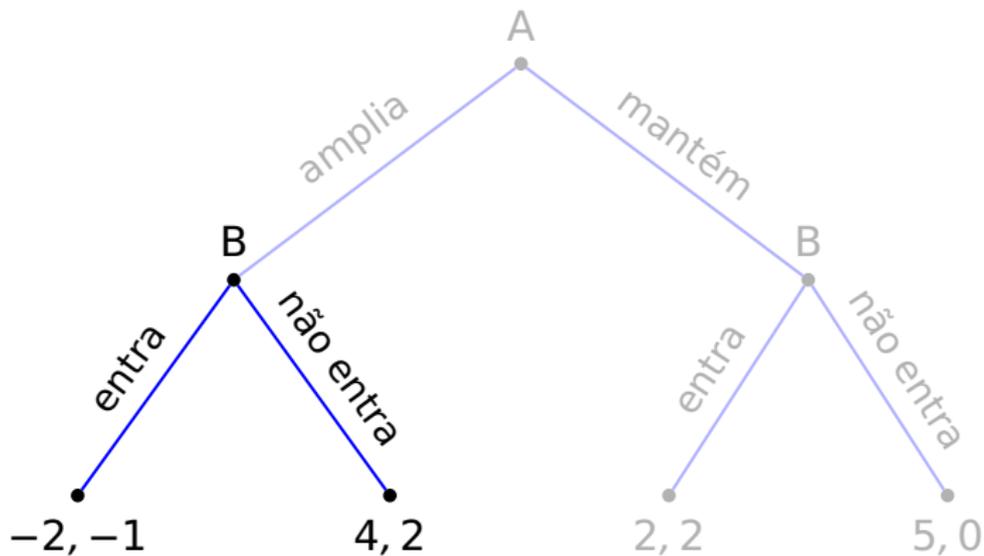
# Exemplo 9

O jogo é um subjogo de si mesmo



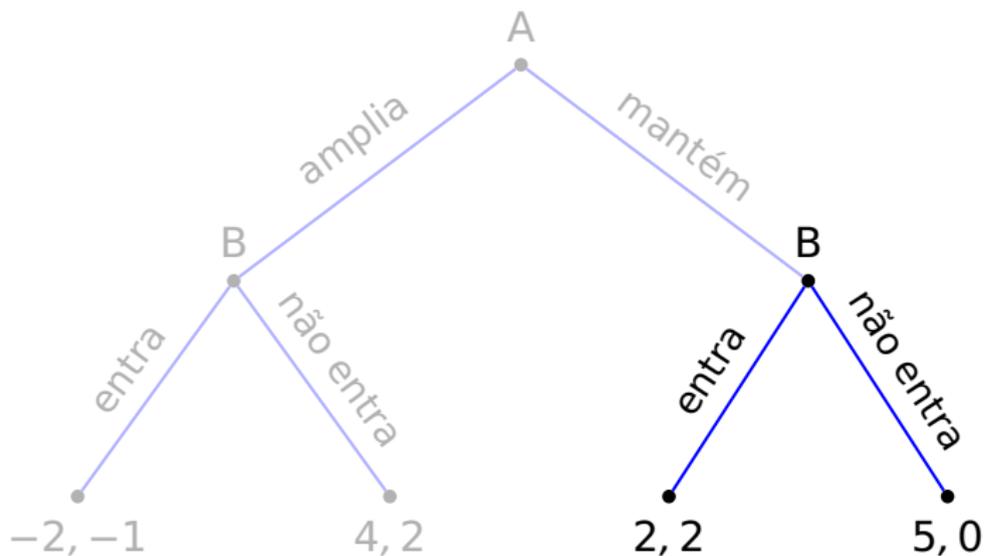
# Exemplo 9

## Segundo subjogo



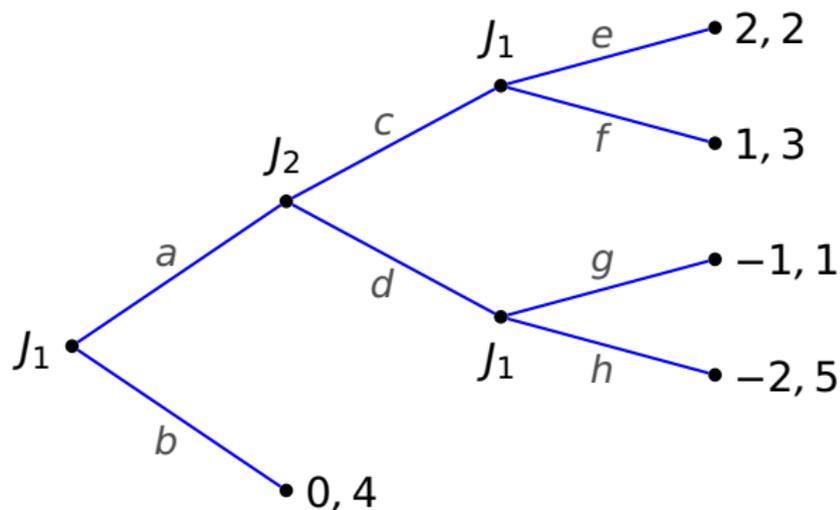
# Exemplo 9

## Terceiro e último subjogo



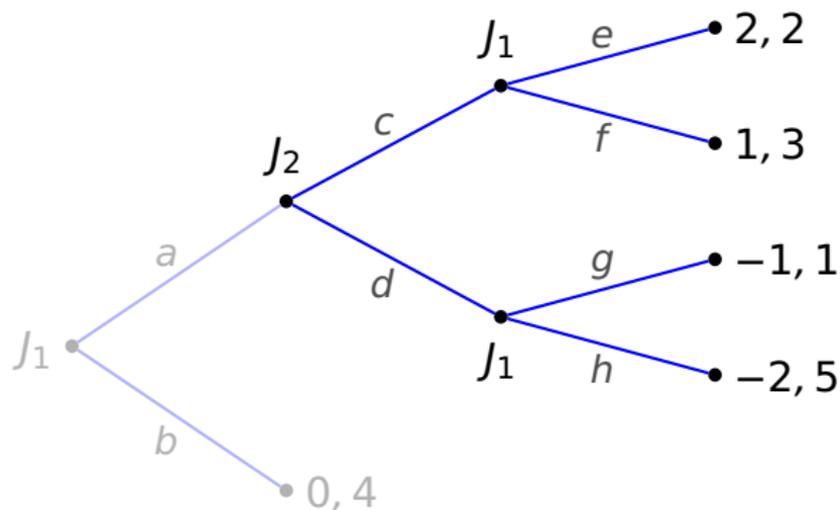
# Exemplo 10

## Primeiro subjogo – o jogo inteiro



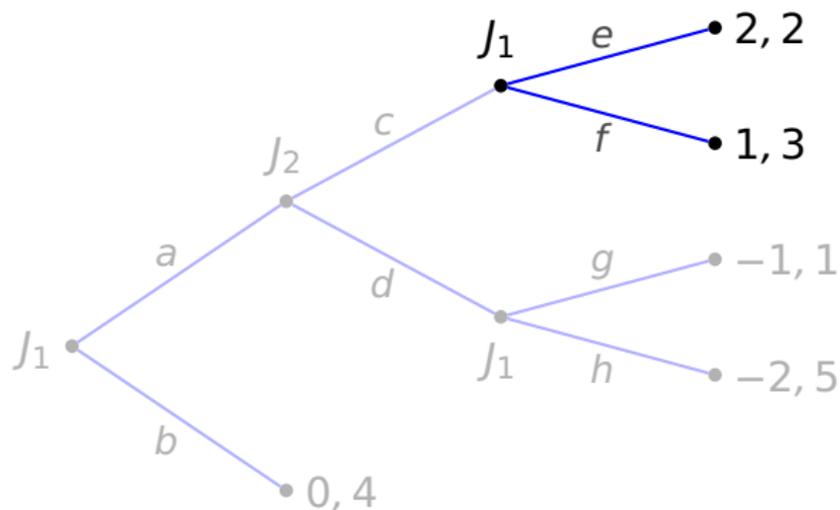
# Exemplo 10

## Segundo subjogo



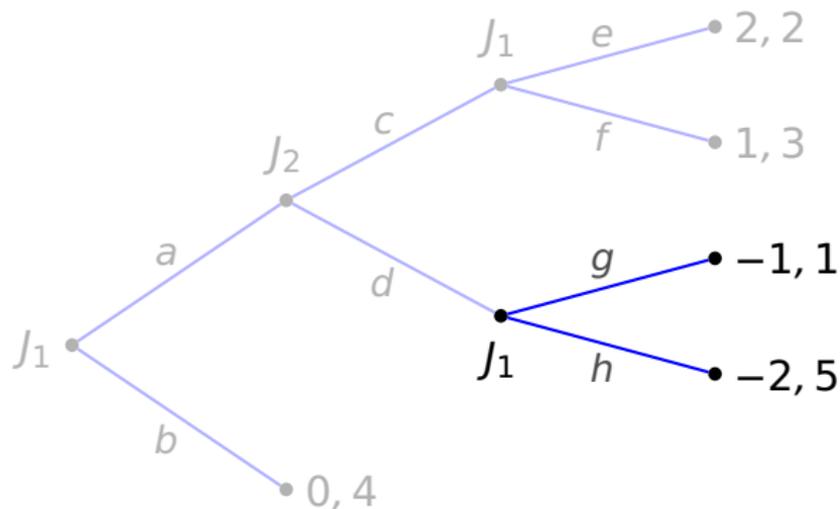
# Exemplo 10

## Terceiro subjogo



# Exemplo 10

## Quarto subjogo



# Continuação de uma estratégia

## Definição

A continuação de uma estratégia em um subjogo é o plano de ação definido por essa estratégia nesse subjogo.

## Exemplo 10

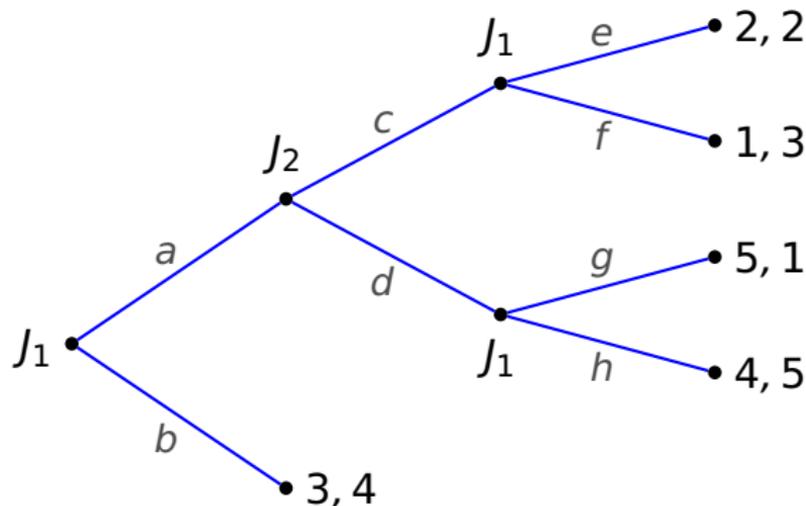
- No exemplo 7 continuação da estratégia  $a, eg$  no subjogo que tem início caso  $J_1$  jogue  $a$  é  $eg$ .
- No mesmo exemplo, a continuação da mesma estratégia no subjogo que tem início após  $J_1$  jogar  $a$  e  $J_2$  jogar  $c$  é  $e$ .
- No exemplo 7 continuação da estratégia  $a, eg$  no subjogo que tem início caso  $J_1$  jogue  $a$  é  $eg$ .

# Equilíbrio de Nash perfeito em subjogos

Um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos de um jogo é uma combinação de estratégias tal que, a combinação de continuações dessas estratégias em cada subjogo do jogo, define, nesse subjogo, um equilíbrio de Nash.

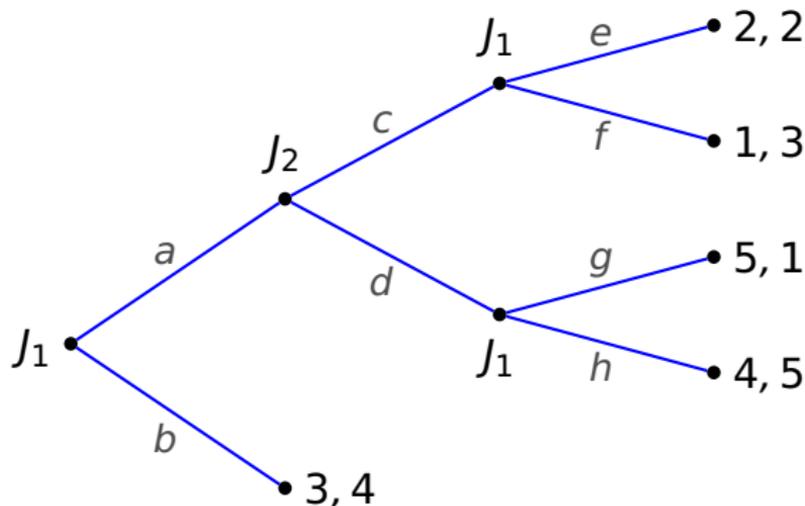
# Exercício

Encontre o perfil de estratégias correspondente ao equilíbrio de Nash perfeito em subjogos no jogo abaixo.



# Exercício

Encontre o perfil de estratégias correspondente ao equilíbrio de Nash perfeito em subjogos no jogo abaixo.



**Resposta:**  $J_1$  joga  $b$ ,  $eg$  e  $J_2$  joga  $c$ .