

Estratégias mistas

Roberto Guena

USP

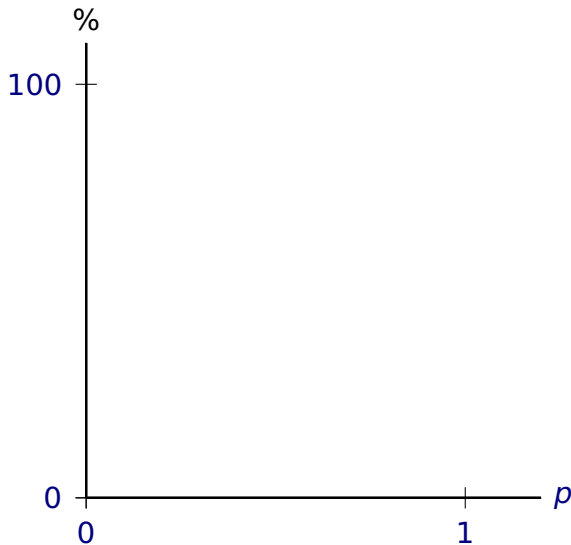
25 de agosto de 2011

Exemplo: Efeito sobre a probabilidade de Seles vencer quando ela mistura suas estratégias

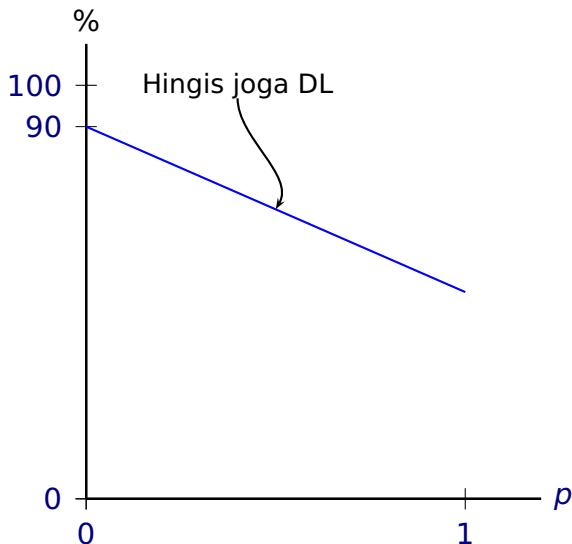
		Hingis	
		DL	CC
Seles	DL	50	80
	CC	90	20
	p -mix	$50p+90(1-p)$	$80p+20(1-p)$

p -mix é a estratégia mista na qual Seles joga DL com probabilidade p e CC com probabilidade $1 - p$.

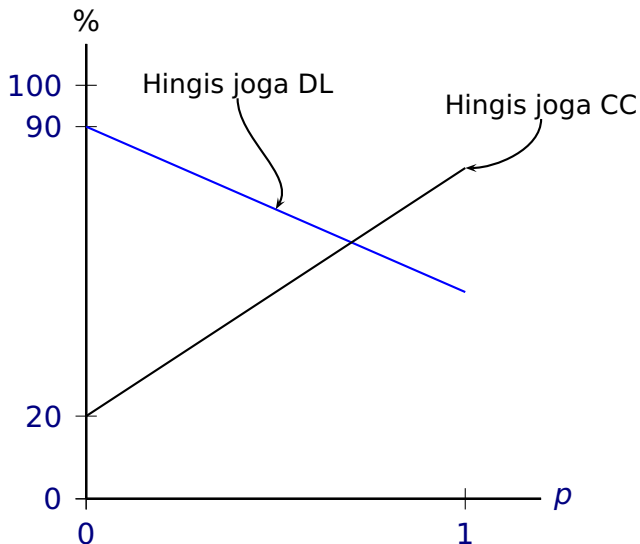
Payoff de Seles em função de p



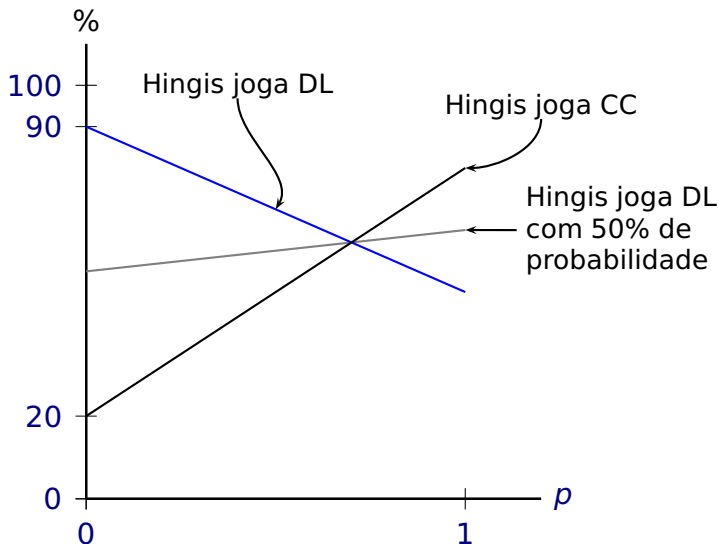
Payoff de Seles em função de p



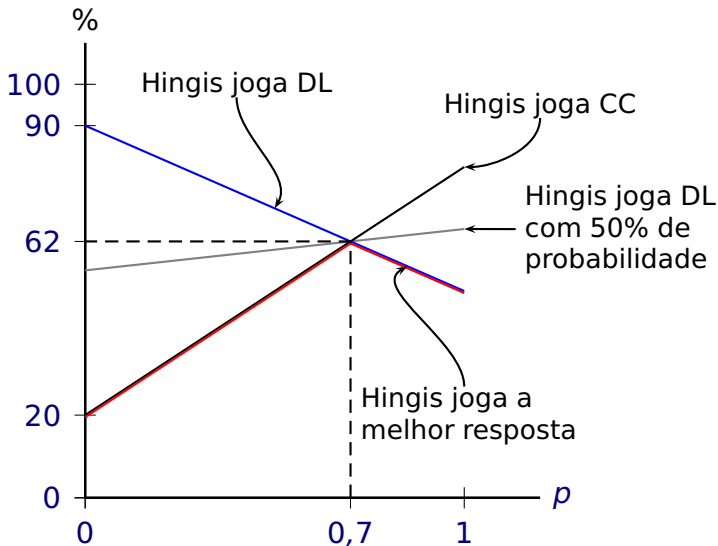
Payoff de Seles em função de p



Payoff de Seles em função de p



Payoff de Seles em função de p



Melhor resposta de Hingis quando Seles mistura estratégias

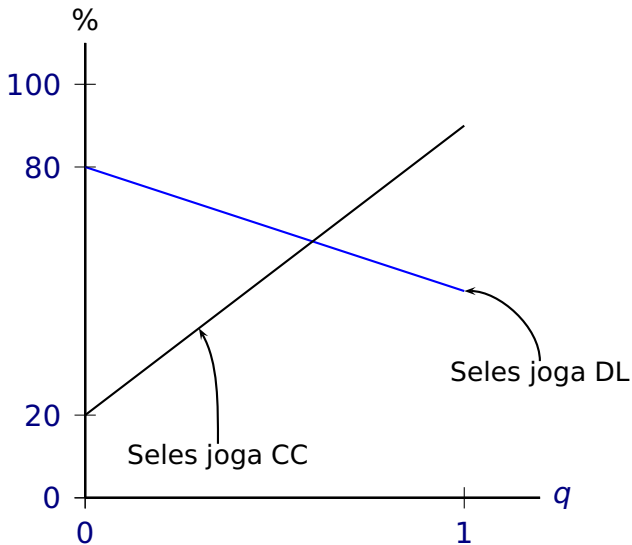
- Se $p < 0,7$** a melhor resposta será CC e Seles vence com probabilidade inferior a 62%.
- Se $p > 0,7$** a melhor resposta será DL e Seles vence com probabilidade inferior a 62%.
- Se $p = 0,7$** DL, CC e qualquer estratégia mista são equivalentes para Hingis e Seles vence com probabilidade de 62%.

Efeito sobre a probabilidade de Seles vencer quando Hingis mistura as estratégias

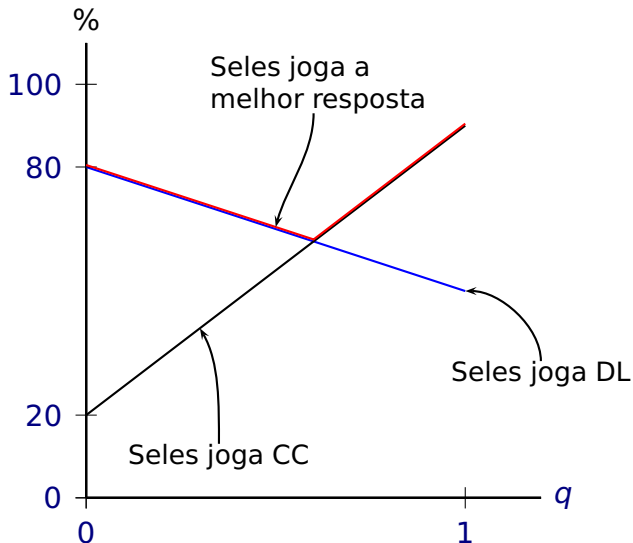
		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	$50q+80(1-q)$
	CC	90	20	$90q+20(1-q)$

q -mix é a estratégia mista na qual Hingis joga DL com probabilidade q e CC com probabilidade $1 - q$.

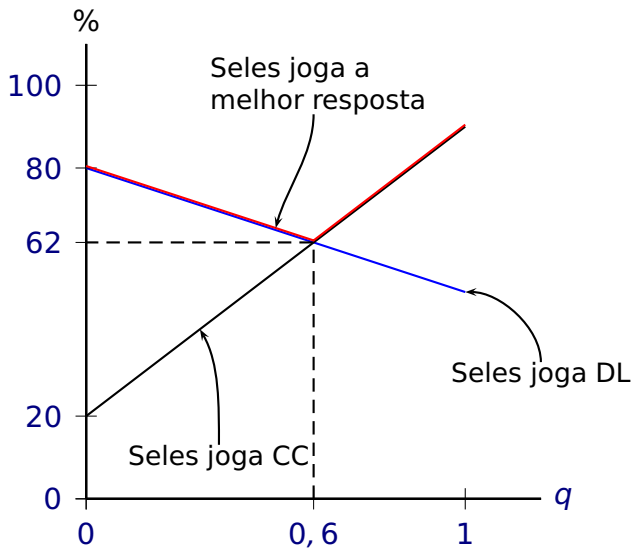
Payoff de Seles em função de q



Payoff de Seles em função de q



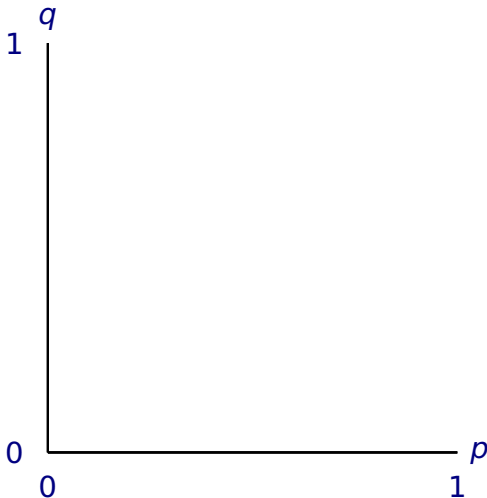
Payoff de Seles em função de q



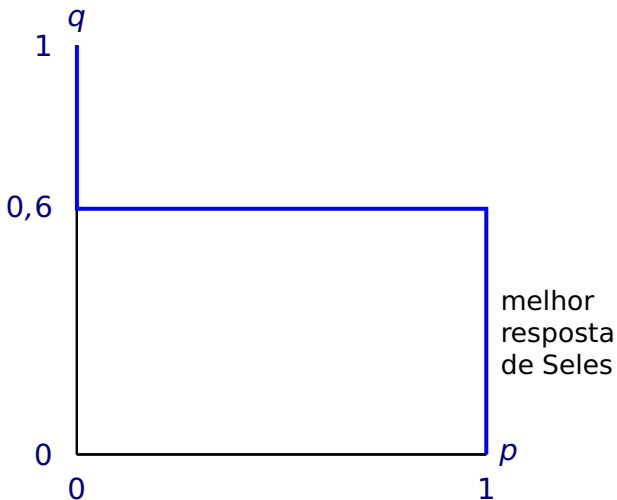
Melhor resposta de Seles quando Hingis mistura estratégias

- Se $p < 0,6$** a melhor resposta será DL e Seles vence com probabilidade superior a 62%.
- Se $p > 0,6$** a melhor resposta será CC e Seles vence com probabilidade superior a 62%.
- Se $p = 0,6$** DL, CC e qualquer estratégia mista são equivalentes para Seles e ela vence com probabilidade de 62%.

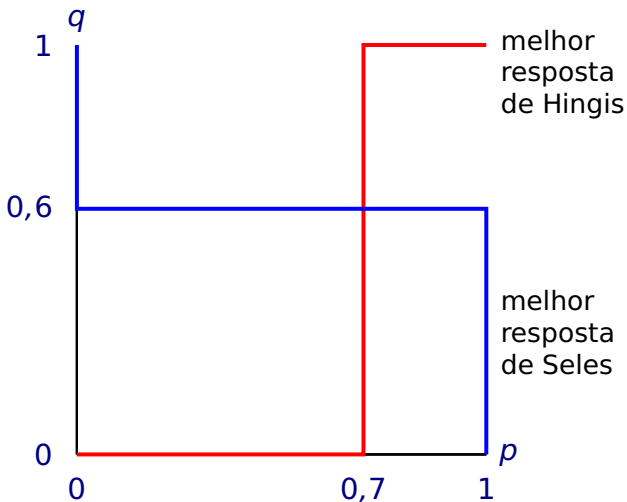
Curvas de melhor resposta e equilíbrio de Nash



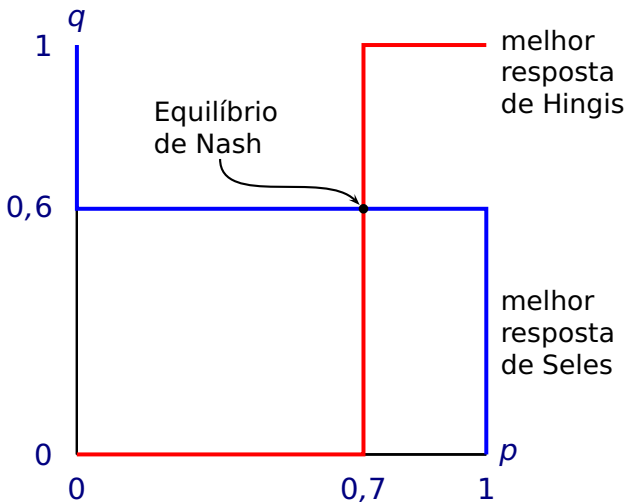
Curvas de melhor resposta e equilíbrio de Nash



Curvas de melhor resposta e equilíbrio de Nash



Curvas de melhor resposta e equilíbrio de Nash



Estratégias mistas em jogos que não são de soma zero: exemplo

		Dean		
		Desvia	Em frente	q -mix
James	Desvia	0, 0	-1, 1	
	Em frente	1, -1	-2, -2	
	p -mix			

Estratégias mistas em jogos que não são de soma zero: exemplo

		Dean		
		Desvia	Em frente	q -mix
James	Desvia	0, 0	-1, 1	
	Em frente	1, -1	-2, -2	
	p -mix	$1-p, p-1$		

Estratégias mistas em jogos que não são de soma zero: exemplo

		Dean		
		Desvia	Em frente	q -mix
James	Desvia	0, 0	-1, 1	
	Em frente	1, -1	-2, -2	
	p -mix	$1-p, p-1$	$p-2, 3p-2$	

Estratégias mistas em jogos que não são de soma zero: exemplo


		Dean		
		Desvia	Em frente	q -mix
James	Desvia	0, 0	-1, 1	$q-1, 1-q$
	Em frente	1, -1	-2, -2	
	p -mix	$1-p, p-1$	$p-2, 3p-2$	

Estratégias mistas em jogos que não são de soma zero: exemplo

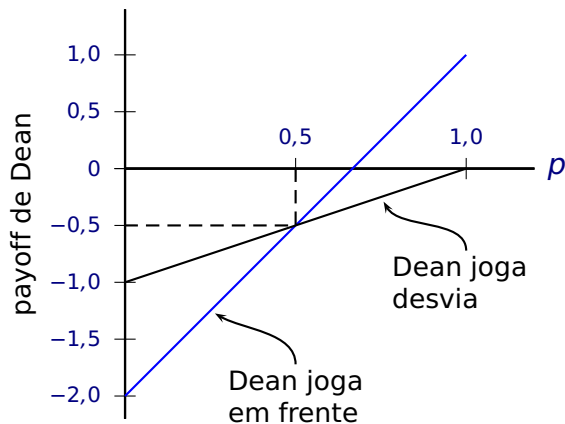
		Dean		
		Desvia	Em frente	q -mix
James	Desvia	0, 0	-1, 1	$q-1, 1-q$
	Em frente	1, -1	-2, -2	$3q-2, q-2$
	p -mix	$1-p, p-1$	$p-2, 3p-2$	

Estratégias mistas em jogos que não são de soma zero: exemplo

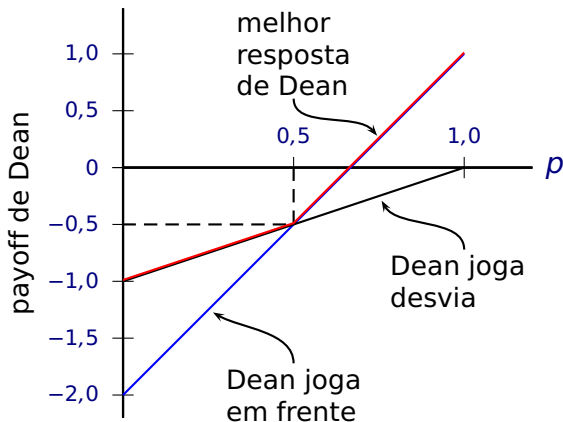
		Dean		
		Desvia	Em frente	q -mix
James	Desvia	0, 0	-1, 1	$q-1, 1-q$
	Em frente	1, -1	-2, -2	$3q-2, q-2$
	p -mix	$1-p, p-1$	$p-2, 3p-2$	

$$p(q-1)+(1-p)(3q-2), q(p-1)+(1-q)(3p-2)$$


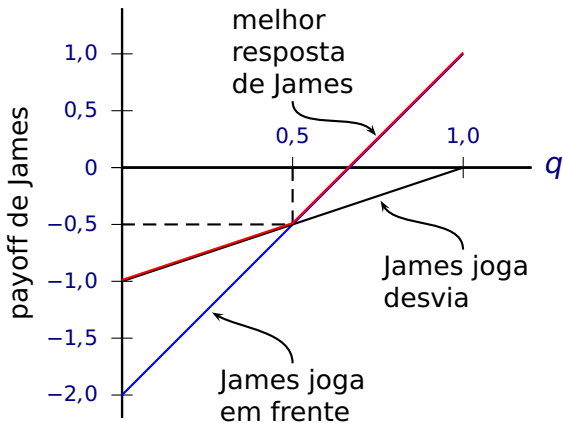
Melhor resposta de Dean



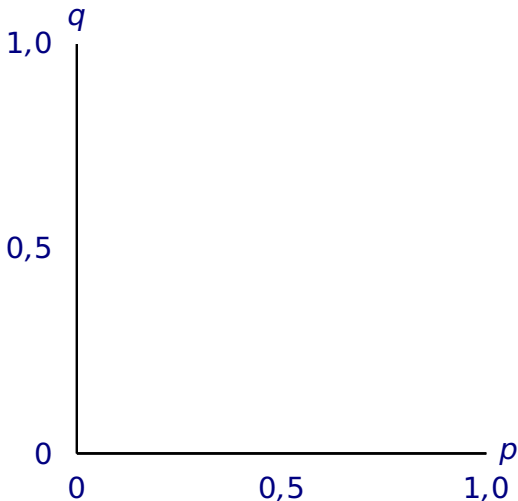
Melhor resposta de Dean



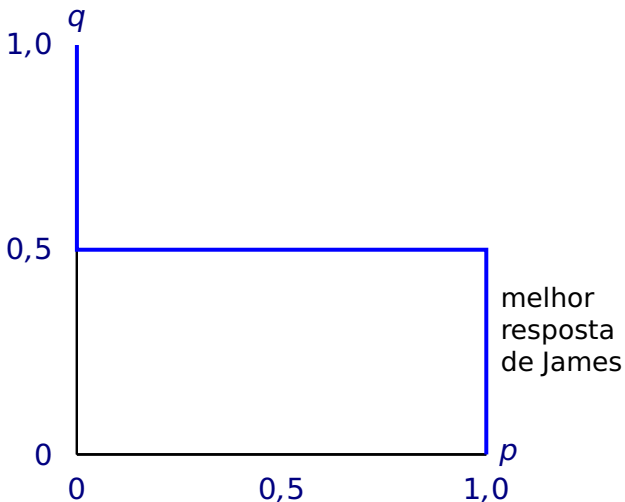
Melhor resposta de James



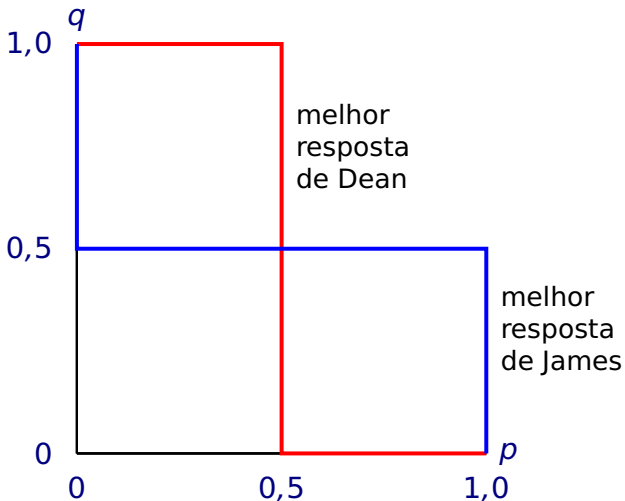
Curvas de melhor resposta e equilíbrio de Nash



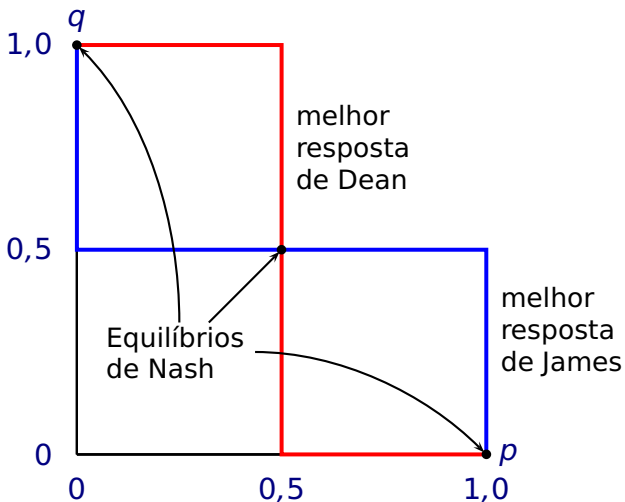
Curvas de melhor resposta e equilíbrio de Nash



Curvas de melhor resposta e equilíbrio de Nash



Curvas de melhor resposta e equilíbrio de Nash



Coordenando escolhas aleatórias

- No equilíbrio de Nash em estratégias mistas, cada jogador desvia com probabilidade de 50% e o payoff esperado é $-0,5$.
- Caso os dois desviassem, o payoff de cada um deles seria igual a zero.
- Porém, (desviar, desviar) não é um equilíbrio de Nash.

Coordenando escolhas aleatórias

- No equilíbrio de Nash em estratégias mistas, cada jogador desvia com probabilidade de 50% e o payoff esperado é $-0,5$.
- Caso os dois desviassem, o payoff de cada um deles seria igual a zero.
- Porém, (desviar, desviar) não é um equilíbrio de Nash.
- O payoff igual a zero pode ser atingido se os dois jogadores concordarem, por exemplo, em jogar uma moeda e que, caso o resultado seja cara, o jogador 1 deve desviar e o jogador 2 deve seguir em frente e, caso o resultado seja coroa, o jogador 1 deve seguir em frente e o jogador 2 desviar.
- Esse é um exemplo do que se chamam equilíbrios correlacionados.

Exercício

Encontre o equilíbrio de Nash em estratégias mistas (não degeneradas) para o jogo Chicken supondo a seguinte matriz de payoffs.

		Dean	
		Desvia	Em frente
James	Desvia	0, 0	-1, 1
	Em frente	1, -1	-10, -10

Exercício

Considere o seguinte jogo:

		J_2	
		Esquerda	Direita
J_1	Acima	a, A	b, B
	Abaixo	c, C	d, D

Se p é a probabilidade com que J_1 escolhe “Acima” e q é a probabilidade com que J_2 escolhe “esquerda”. Mostre que, caso haja um equilíbrio de Nash em estratégias mistas com $0 < p < 1$ e $0 < q < 1$, então, nesse equilíbrio

$$\frac{p}{1-p} = \frac{D-C}{A-B} \quad \text{e} \quad \frac{q}{1-q} = \frac{d-b}{a-c}$$

Exercício

Encontre o equilíbrio de Nash em estratégias mistas não degeneradas para o jogo “guerra dos sexos” descrito abaixo

		Ele	
		Ballet	Futebol
Ela	Ballet	2, 1	0, 0
	Futebol	0, 0	1, 2

Exercício

Seles aprimorou sua paralela e as probabilidades de ela ganhar o ponto passaram a ser as seguintes:

		Hingis	
		DL	CC
Seles	DL	55	90
	CC	90	20

Com que frequência Seles escolherá DL? Essa frequência é maior ou menor do que no nosso exemplo inicial? Explique seu resultado.

Mais de duas estratégias puras: exemplo

		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	
	CC	90	20	
	Lob	70	60	
	p -mix			

p_1 : probabilidade com que Seles escolhe DL.

p_2 : probabilidade com que Seles escolhe CC.

q : probabilidade com que Hingis escolhe DL.

Mais de duas estratégias puras: exemplo

		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	
	CC	90	20	
	Lob	70	60	
	p -mix	$20p_2 - 20p_1 + 70$		

p_1 : probabilidade com que Seles escolhe DL.

p_2 : probabilidade com que Seles escolhe CC.

q : probabilidade com que Hingis escolhe DL.

Mais de duas estratégias puras: exemplo

		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	
	CC	90	20	
	Lob	70	60	
	p -mix	$20p_2 - 20p_1 + 70$	$20p_1 - 40p_2 + 60$	

p_1 : probabilidade com que Seles escolhe DL.

p_2 : probabilidade com que Seles escolhe CC.

q : probabilidade com que Hingis escolhe DL.

Mais de duas estratégias puras: exemplo

		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	$50q+80(1-q)$
	CC	90	20	
	Lob	70	60	
	p -mix	$20p_2-20p_1+70$	$20p_1-40p_2+60$	

p_1 : probabilidade com que Seles escolhe DL.

p_2 : probabilidade com que Seles escolhe CC.

q : probabilidade com que Hingis escolhe DL.

Mais de duas estratégias puras: exemplo

		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	$50q+80(1-q)$
	CC	90	20	$90q+20(1-q)$
	Lob	70	60	
	p -mix	$20p_2-20p_1+70$	$20p_1-40p_2+60$	

p_1 : probabilidade com que Seles escolhe DL.

p_2 : probabilidade com que Seles escolhe CC.

q : probabilidade com que Hingis escolhe DL.

Mais de duas estratégias puras: exemplo

		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	$50q+80(1-q)$
	CC	90	20	$90q+20(1-q)$
	Lob	70	60	$70q+60(1-q)$
	p -mix	$20p_2-20p_1+70$	$20p_1-40p_2+60$	

p_1 : probabilidade com que Seles escolhe DL.

p_2 : probabilidade com que Seles escolhe CC.

q : probabilidade com que Hingis escolhe DL.

Mais de duas estratégias puras: exemplo

		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	$50q+80(1-q)$
	CC	90	20	$90q+20(1-q)$
	Lob	70	60	$70q+60(1-q)$
	p -mix	$20p_2-20p_1+70$	$20p_1-40p_2+60$	

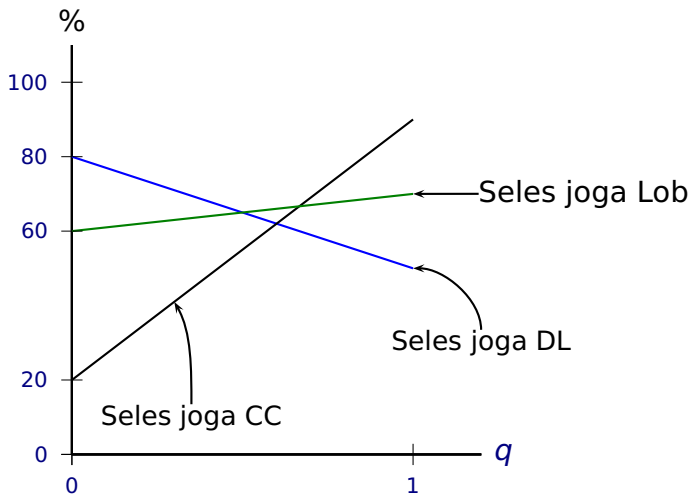
$$p_1[50q+80(1-q)]+p_2[90q+20(1-q)]+(1-p_1-p_2)[70q+60(1-q)]$$

p_1 : probabilidade com que Seles escolhe DL.

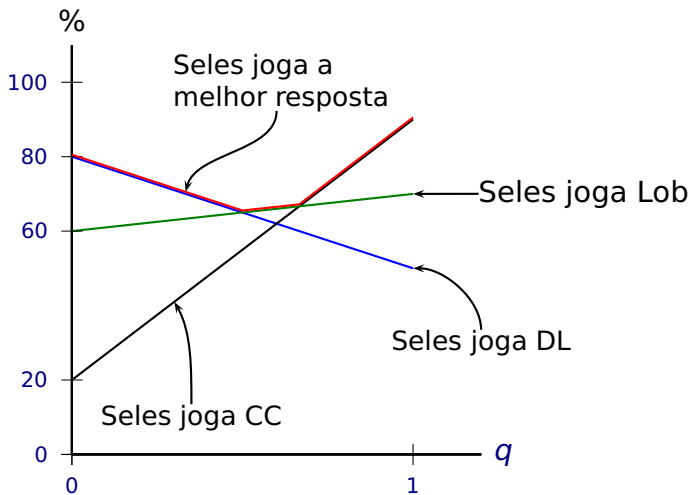
p_2 : probabilidade com que Seles escolhe CC.

q : probabilidade com que Hingis escolhe DL.

Encontrando a estratégia de minimax de Hingis



Encontrando a estratégia de minimax de Hingis



Encontrando a estratégia de minimax de Hingis

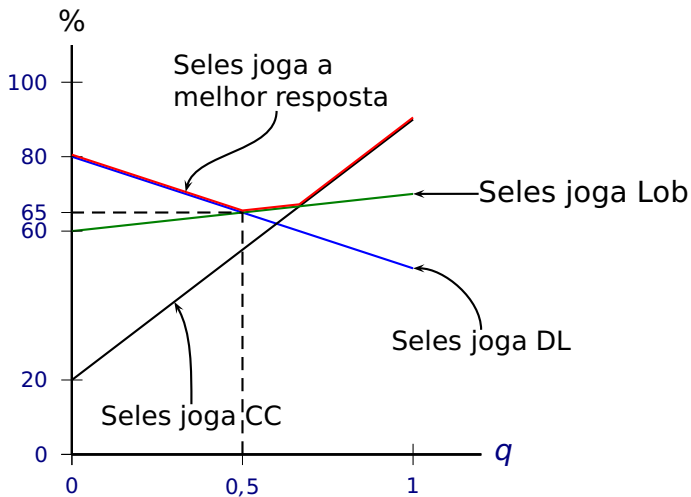


Tabela de payoffs após a eliminação da estratégia CC para Seles

		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	
	Lob	70	60	
	p -mix			

Tabela de payoffs após a eliminação da estratégia CC para Seles

		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	
	Lob	70	60	
	p -mix	$50p_1 + 70(1-p_1)$		

Tabela de payoffs após a eliminação da estratégia CC para Seles

		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	
	Lob	70	60	
	p -mix	$50p_1+70(1-p_1)$	$80p_1+60(1-p_1)$	

Tabela de payoffs após a eliminação da estratégia CC para Seles


		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	$50q+80(1-q)$
	Lob	70	60	
	p -mix	$50p_1+70(1-p_1)$	$80p_1+60(1-p_1)$	

Tabela de payoffs após a eliminação da estratégia CC para Seles

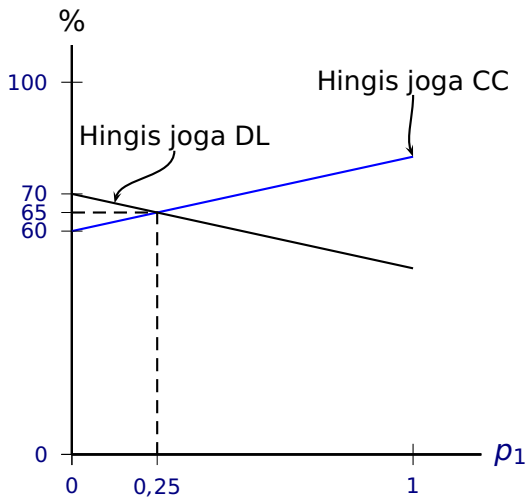
		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	$50q+80(1-q)$
	Lob	70	60	$70q+60(1-q)$
	p -mix	$50p_1+70(1-p_1)$	$80p_1+60(1-p_1)$	

Tabela de payoffs após a eliminação da estratégia CC para Seles

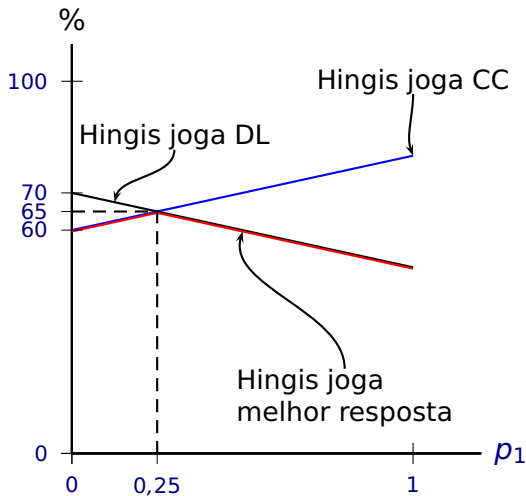
		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	$50q+80(1-q)$
	Lob	70	60	$70q+60(1-q)$
	p -mix	$50p_1+70(1-p_1)$	$80p_1+60(1-p_1)$	

$$p_1[50q+80(1-q)]+(1-p_1)[70q+60(1-q)]$$


Encontrando a estratégia de maxmin de Seles



Encontrando a estratégia de maxmin de Seles



Infinitos equilíbrios: exemplo

		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	
	CC	90	20	
	Lob	70	50	
	p -mix			

Infinitos equilíbrios: exemplo

		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	
	CC	90	20	
	Lob	70	50	
	p -mix	$20p_2 - 20p_1 + 70$		

Infinitos equilíbrios: exemplo

		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	
	CC	90	20	
	Lob	70	50	
	p -mix	$20p_2 - 20p_1 + 70$	$30p_1 - 30p_2 + 50$	

Infinitos equilíbrios: exemplo

		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	$50q+80(1-q)$
	CC	90	20	
	Lob	70	50	
	p -mix	$20p_2-20p_1+70$	$30p_1-30p_2+50$	

Infinitos equilíbrios: exemplo


		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	$50q+80(1-q)$
	CC	90	20	$90q+20(1-q)$
	Lob	70	50	
	p -mix	$20p_2-20p_1+70$	$30p_1-30p_2+50$	

Infinitos equilíbrios: exemplo

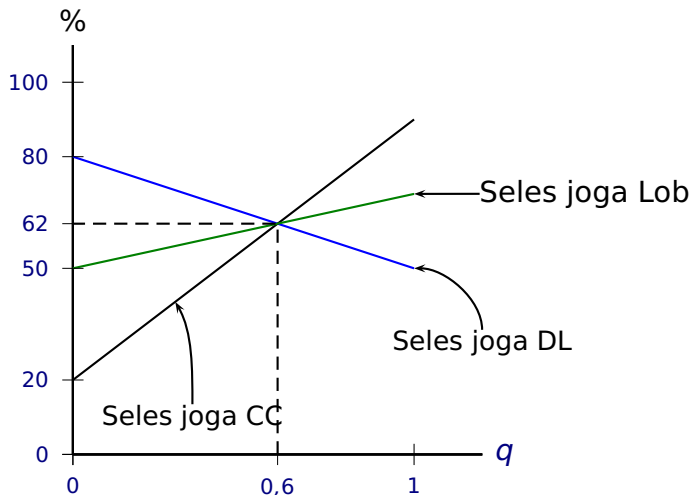
		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	$50q+80(1-q)$
	CC	90	20	$90q+20(1-q)$
	Lob	70	50	$70q+50(1-q)$
	p -mix	$20p_2-20p_1+70$	$30p_1-30p_2+50$	

Infinitos equilíbrios: exemplo

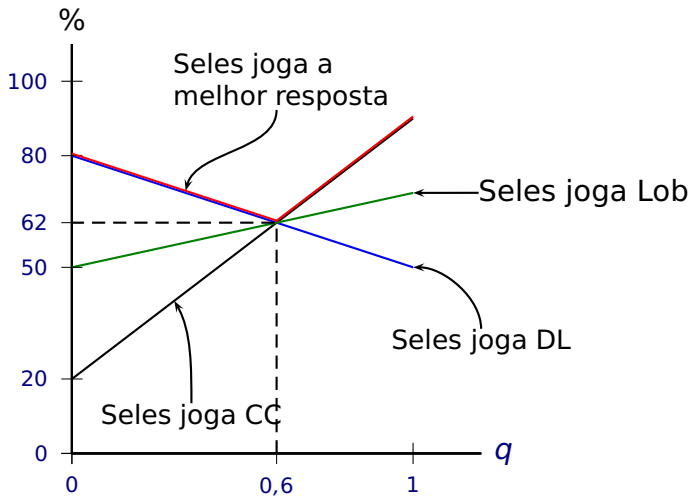
		Hingis		
		DL	CC	q -mix
Seles	DL	50	80	$50q+80(1-q)$
	CC	90	20	$90q+20(1-q)$
	Lob	70	50	$70q+50(1-q)$
	p -mix	$20p_2-20p_1+70$	$30p_1-30p_2+50$	

$$p_1[50q+80(1-q)]+p_2[90q+20(1-q)]+(1-p_1-p_2)[70q+50(1-q)]$$


Encontrando a estratégia de minimax de Hingis



Encontrando a estratégia de minimax de Hingis



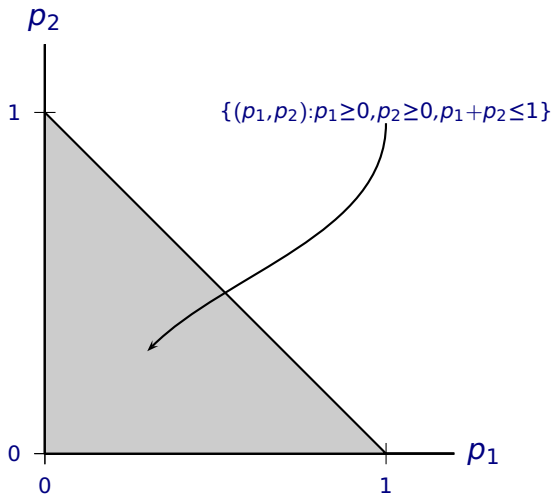
Definindo a estratégia de Seles

Para maximizar seu menor payoff, Seles deve escolher p_1 e p_2 de modo a fazer que

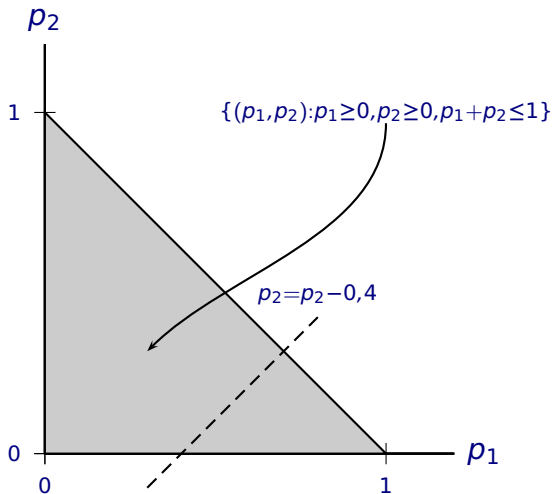
$$20p_2 - 20p_1 + 70 = 30p_1 - 30p_2 + 50 \Rightarrow p_2 = p_1 - 0,4$$

Além disso, p_1 e p_2 deve satisfazer as condições $0 \leq p_1 \leq 1$, $0 \leq p_2 \leq 1$ e $0 \leq p_1 + p_2 \leq 1$.

Múltiplos p -mix de equilibrio de Seles



Múltiplos p -mix de equilibrio de Seles



Múltiplos p -mix de equilíbrio de Seles

