Produção:

* Vetor de produção liquida
* Conjunto de produção
* produção tecnicamente eficiente
* função de produção
* Isoquantas
* Hipóteses usuais)
* Medidas de produtividade
* Taxa técnica de substituição
* Rendimentos de escala
* Curto e longo prazos
* Rendimentos marginais decrescentes

Definição: Quando uma empresa multiplica o emprego de todos seus fatores de produção por uma constante $\alpha > 0$, dizemos que ela alterou sua escala de produção pelo fator α.

Definição: Seja a função de produção $f(\mathbf{x})$ [$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$] e uma constante α qualquer. Dizemos que, considerando o vetor de emprego de insumo $\mathbf{x}$ e o fator de escala α, essa função apresenta:

- rendimentos constantes de escala se

$$f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$$

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_m) = \alpha f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

Exemplo: $f(x_1, x_2) = A x_1^a x_2^{1-a}$, $A > 0$, $0 < a < 1$

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2) = A(\alpha x_1)^a (\alpha x_2)^{1-a} = A \alpha^a x_1^a \alpha^{(1-a)} x_2^a$$

$$= \alpha A x_1^a x_2^a = \alpha f(x_1, x_2)$$

var. rel. no emp. dos fatores.

$$\Rightarrow f(\alpha \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = (\alpha - 1) f(\mathbf{x})$$

var. perc. no produto

$$\Rightarrow \left[\frac{f(\alpha \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{(\alpha - 1) f(\mathbf{x})} = 1\right] \qquad \left[\frac{f(\alpha \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}\right. = \underbrace{\alpha - 1}_{\text{var. perc. no emp. dos insumos.}}$$

- rendimentos crescentes de escala se

$$\frac{f(\alpha \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{(\alpha - 1) f(\mathbf{x})} > 1 \qquad \alpha > 1 \qquad \frac{f(\alpha \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} > \alpha - 1$$

$$\frac{\Delta y / y}{\Delta x_i / x_i} = \frac{\Delta y / y}{\alpha - 1} > 1$$

$0 < \alpha < 1$

$$\frac{f(\alpha x) - f(x)}{f(x)} < \alpha - 1 \qquad \overbrace{\underbrace{\frac{f(x) - f(\alpha x)}{f(x)}}_{\text{red. perc. no produto}}} > \overbrace{\underbrace{1-\alpha}_{\text{red. perc. no emprego dos insumos.}}}$$

· rendimentos decrescentes de escala caso

$$\frac{f(\alpha x) - f(x)}{f(x)(\alpha - 1)} < 1$$

Ex 1: $f(x_1, x_2) = A\, x_1^a x_2^b \qquad A, a, b > 0$

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2) = A(\alpha x_1)^a(\alpha x_2)^b = \alpha^{a+b} A x_1^a x_2^b$$

$a+b > 1 \Rightarrow$ rend. cresc. de escala $\quad = \alpha^{a+b} f(x_1, x_2)$

$a+b < 1 \Rightarrow$ rend. decresc. de escala

$a+b = 1 \Rightarrow$ rend. constantes de escala.

Exemplo 2: $f(x_1, x_2) = A\underbrace{\left[a x_1^\rho + (1-a) x_2^\rho\right]}^{\frac{\gamma}{\rho}}$ (CES) $\gamma > 0$ (generalizada)

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2) = A\left[a(\alpha x_1)^\rho + (1-a)(\alpha x_2)^\rho\right]^{\frac{\gamma}{\rho}}$$

$$= A\left[a\alpha^\rho x_1^\rho + (1-a)\alpha^\rho x_2^\rho\right]^{\frac{\gamma}{\rho}} =$$

$$= A\left[(\alpha)^\rho\left(a x_1^\rho + (1-a)x_2^\rho\right)\right]^{\gamma/\rho} = \alpha^\gamma \underbrace{A\left[a x_1^\rho + (1-a) x_2^\rho\right]^{\frac{\gamma}{\rho}}}_{f(x_1, x_2)}$$

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2) = \alpha^\gamma f(x_1, x_2)$$

$\gamma > 1 \Rightarrow$ rend. crescentes de escala
$\gamma < 1 \Rightarrow$ " decrescentes " "
$\gamma = 1 \Rightarrow$ " constantes " "

Def. a função $f(x)$ é homogênea de grau k caso, p/ $\forall\ \alpha > 0$,

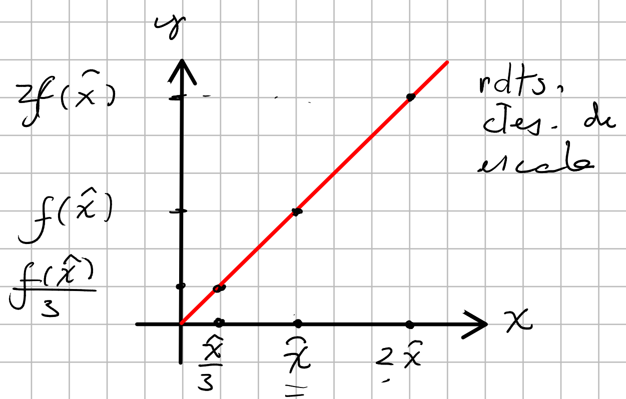
$$f(\alpha x) = \underbrace{\alpha^k}\, f(x)$$

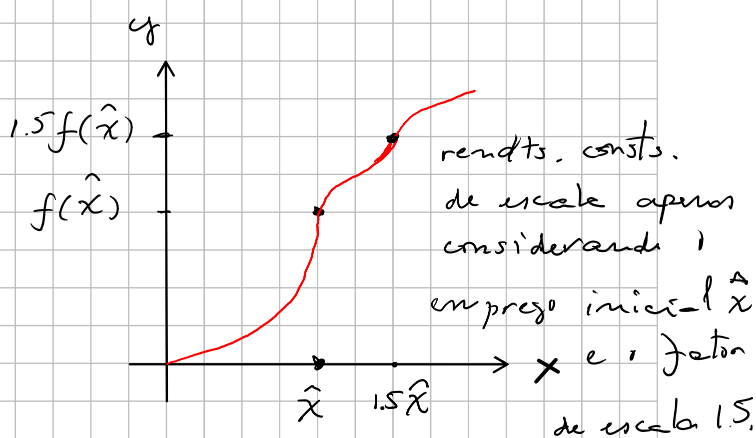
Se $f(x)$ é homogênea de grau k então ela apresenta rendimentos crescentes, constantes ou decrescentes de escala caso, respectivamente, $k>1$, $k=1$, $k<1$.

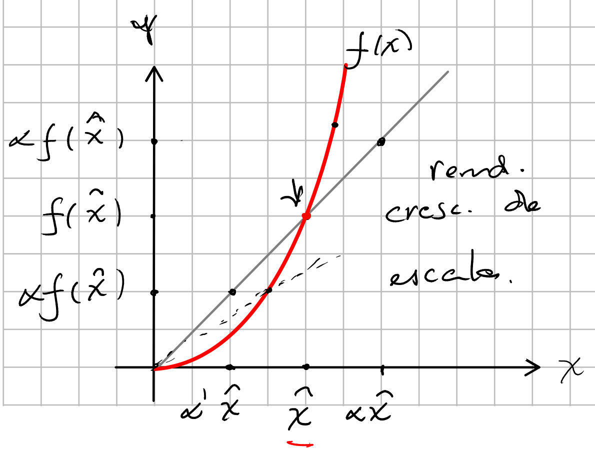
A função de produção $f(x)$ apresenta globalmente, ou seja, para qualquer $x \geq 0$ e qquer. $\alpha > 0$, rendimentos constantes de escala se, e somente se, ela for homogênea de grau 1.

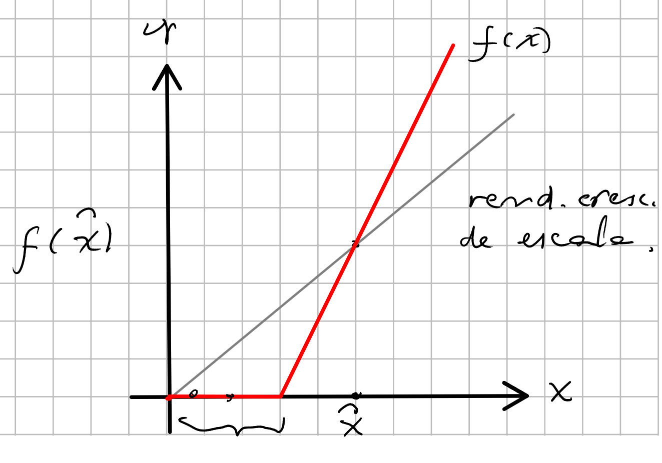
Interpretação gráfica

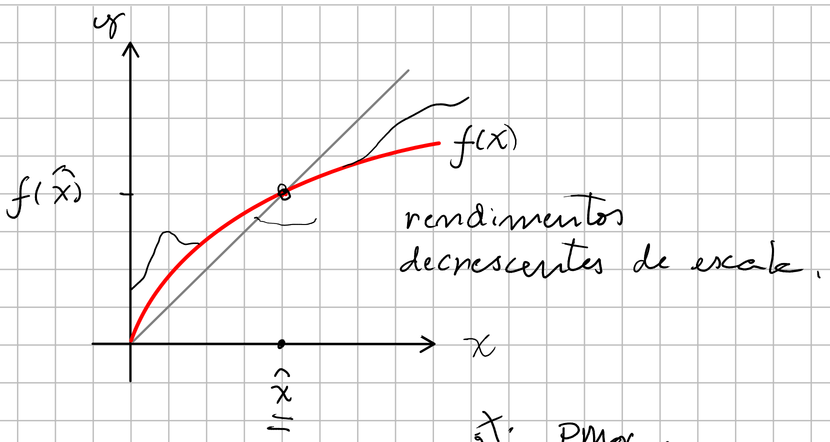
a) $y = f(x)$ | insumo.

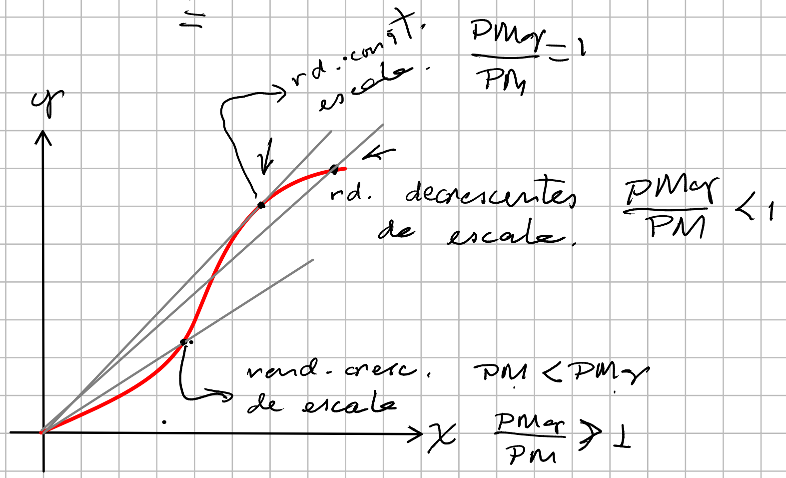












$$f_1(x_1,x_2) = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}$$

2) $f(x_1, x_2)$

f.

L'Hopital

$$\lim_{\alpha \to 1} \underbrace{\frac{f(\alpha x_1, \alpha x_2) - f(x_1,x_2)}{(\alpha - 1)\; f(x_1,x_2)}}_{\text{elastidade de escala da } f(x_1,x_2)} = \lim_{\alpha \to 1} \frac{\frac{d}{d\alpha} f(\alpha x_1, \alpha x_2)}{\frac{d}{d\alpha} (\alpha - 1) f(x_1, x_2)}$$

$$= \lim_{\alpha \to 1} \frac{x_1 f_1(\alpha x_1, \alpha x_2) + x_2 f_2(\alpha x_1, \alpha x_2)}{f(x_1, x_2)}$$

$$= \frac{x_1 PMg_1 + x_2 PMg_2}{f(x_1, x_2)}$$

$$= \frac{\cancel{x_1} PMg_1}{\frac{f(x_1,x_2)}{x_1}} + \frac{\cancel{x_2} PMg_2}{\frac{f(x_1,x_2)}{x_2}}$$

$$= \frac{PMg_1}{PM_1} + \frac{PMg_2}{PM_2}$$