Teoria do Consumidor: Escolha Envolvendo Risco

Roberto Guena de Oliveira

USP

13 de agosto de 2010

Estrutura da aula

Exemplos

1. Um bilhete de loteria representa alguns milhões a mais ou alguns reais a menos.
2. Quando você sai de casa com um guarda-chuva você leva consigo apenas um peso a mais para carregar (caso não chova) ou proteção contra a chuva (caso chova).
3. Quando você aluga uma casa na praia, você compra um fim-de-semana sob o sol ou um fim-de-semana jogando baralho.
4. Quando você faz seguro de seu caso você compra reembolso de despesas com acidentes (caso eles ocorram) ou dinheiro jogado fora (caso nada aconteça).

Loterias

Definição

Uma loteria é um conjunto de prêmios alternativos e mutuamente excludentes, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sendo que o prêmio i (para $i = 1, 2, \ldots, n$) é associado a uma probabilidade de ocorrência π_i de tal sorte que $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$. Os prêmios podem ser cestas de bens, prêmios monetários ou outras loterias.

notação

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$$

Valor esperada de uma loteria

Caso uma loteria

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$$

ofereça apenas prêmios monetários, é possível definir o valor esperado dessa loteria por

$$VE = \pi_1 c_1 + \pi_2 c_2 + \ldots + \pi_n c_n = \sum_{i=1}^{n} \pi_i c_i$$

Exemplo

Uma pessoa investiu toda sua riqueza w em ações de uma empresa que podem, em um ano, valorizar-se 20% com probabilidade $3/4$ ou desvalorizar-se 10% com probabilidade $1/4$. A riqueza dessa pessoa daqui a um ano pode ser representada pela loteria

$$(1.2w, 0.9w; 0.75, 0.25).$$

O valor esperado dessa loteira, ou seja o valor esperado de sua riqueza para daqui a um ano, é

$$0.75 \times 1.2w + 0.25 \times 0.9w = 1.125w.$$

Utilidade Esperada

John Von Neumann e Oskar Morgenstern [1] mostraram que, dadas algumas hipóteses razoáveis sobre as preferências do consumidor entre loterias, tais preferências podem ser representadas por uma função de utilidade $U(\cdot)$ com a seguinte propriedade:

$$U(c_1, c_2; \pi_1, \pi 2) = \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2).$$

na qual $u(c_1)$ e $u(c_2)$ são as utilidade de se ganhar os prêmios c_1 e c_2, respectivamente, com 100% de certeza. Qualquer função de utilidade com essa propriedade é chamada de função de utilidade de Von Neumann e Morgenstern ou de função de utilidade com propriedade utilidade esperada.

[1] *Theory of Games and Economic Behavior. Princeton Un. Press, 1943.*

Transformações afim

Definição

Caso tenhamos $V(\cdot) = a + bU(\cdot)$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$. Dizemos que $V(\cdot)$ é uma transformação monotônica afim de $U(\cdot)$.

Propriedade da utilidade esperada

$U(\cdot)$ e $V(\cdot)$ são funções de utilidade que representam as mesmas preferências e têm propriedade utilidade esperada, se, e somente se, forem transformações monotônicas afim uma da outra.

Concavidade

Note que a concavidade ou convexidade de uma função é preservada por transformações monotônicas afim.

Exemplo:

Um indivíduo tem uma riqueza não nula e sua função de utilidade von Neumann-Morgenstern tem a forma funcional $u(x) = K - {}^{a}/_{x}$, em que a e K são constantes positivas e $x > {}^{a}/_{K}$. Este indivíduo é convidado a participar de uma loteria que triplica sua riqueza com probabilidade p e a reduz à terça parte com probabilidade $1 - p$. Qual deve ser o valor mínimo de p para que o indivíduo aceite participar da loteria? Multiplique a probabilidade encontrada por 100. **R:75**

Estrutura da aula

Estrutura da aula

Definições

Aversão ao risco

Diz-se que um consumidor é aveso ao risco caso ele prefira o valor esperado dos prêmios de uma loteria com prêmios monetário a essa loteria.

Propenção ao risco

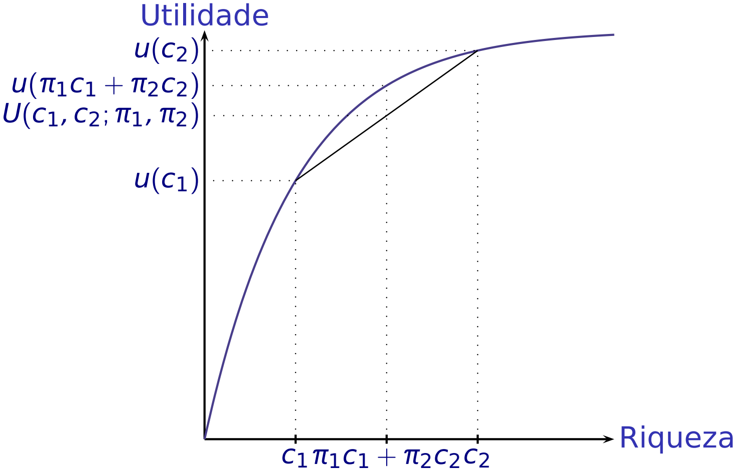
Diz-se que um consumidor é propenso ao risco caso ele prefira uma loteria com prêmios monetário ao valor esperado dos prêmios dessa loteria.

Neutralidade frente ao risco

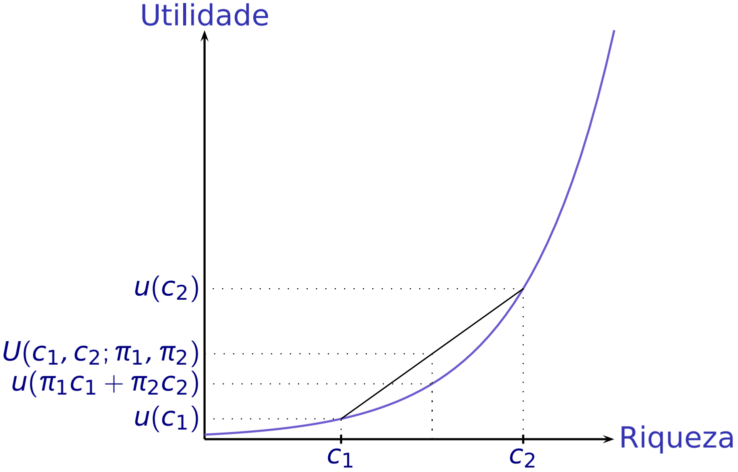
Diz-se que um consumidor é risco neutro caso ele seja indiferente entre uma loteria com prêmios monetário e o valor esperado dos prêmios dessa loteria.

Estrutura da aula

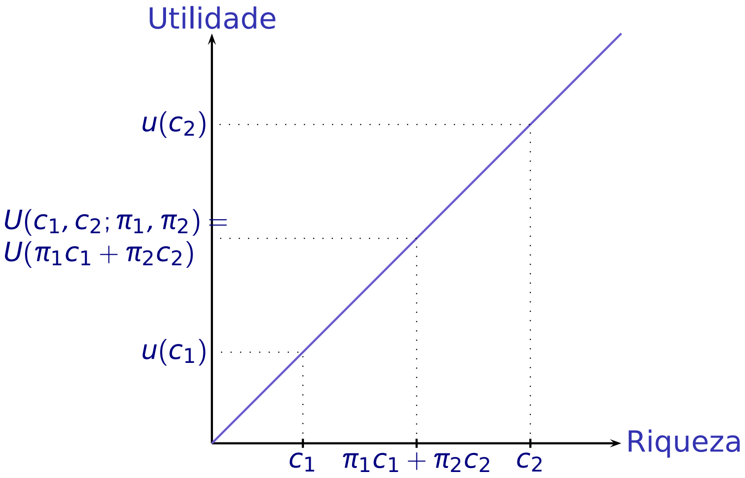
Aversão ao risco: representação gráfica



Propensão ao risco: representação gráfica



Neutralidde frente ao risco: representação gráfica



Estrutura da aula

Definições

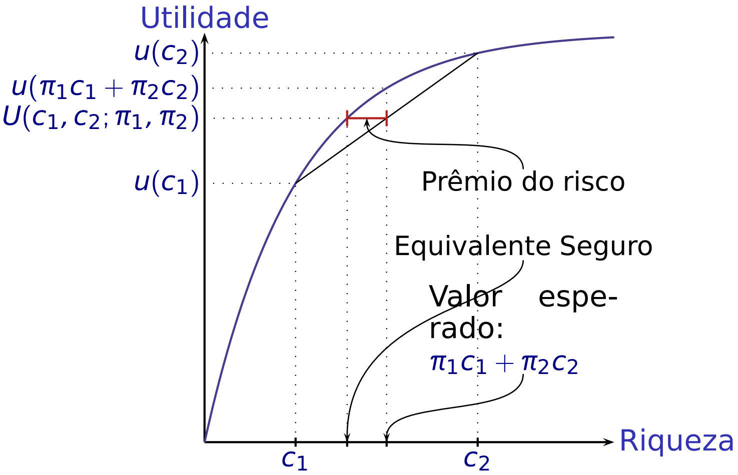
Equivalente Seguro

O equivalente seguro de uma loteria monetária é o valor 100% seguro que o consumidor considera indiferente à loteria.

Prêmio do risco

O prêmio do risco de uma loteria monetária é a diferença entre o valor esperado dessa loteria e seu equivalente seguro.

Representação gráfica



Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern: $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que w pode assumir: 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

Valor esperado: $VE = \dfrac{9+25}{2} = 17$

Utilidade esperada: $UE = \dfrac{3+5}{2} = 4$

Equivalente seguro: $\sqrt{ES} = 4 \Rightarrow ES = 16$

Prêmio do risco: $PR = VE - ES = 17 - 16 = 1$

Exemplo

Um consumidor tem uma função utilidade de von Neumann-Morgenstern representada por $u(z) = \log_2 z$. Ele possui uma riqueza inicial de R$ 128 e participará gratuitamente de uma loteria que pagará R$ 384,00 com probabilidade $\frac{1}{2}$ e R$ 0 com probabilidade $\frac{1}{2}$. O menor valor que o consumidor estaria disposto a receber em troca do bilhete de loteria é de 2^{β}. Qual o valor de β?

Estrutura da aula

Medidas de aversão ao risco

Aversão absoluta

$$-\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Aversão relativa

$$-w\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Funções de utilidade com aversão ao risco constante

Absoluta

$$u(w) = -e^{-\alpha w}$$

Relativa

$$u(w) = w^{1-\alpha} \quad \text{para } \alpha \neq 1$$

$$u(w) = \ln w \quad \text{para } \alpha = 1$$

Exemplo

Um indivíduo possui riqueza $W = \$100$ e se depara com uma loteria que pode acrescentar $\$44$ a sua riqueza, com probabilidade $1/4$, ou subtrair $\$36$, com probabilidade $3/4$. Sua utilidade, do tipo Von Neumann-Morgenstern (VNM), é dada por $u(x) = \sqrt{x}$.

- Qual é sua aversão absoluta ao risco?
- Qual é sua aversão relativa ao risco?
- Qual o valor máximo que ele estaria disposto a pagar para se livrar desse risco?

Estrutura da aula

Exemplo:

Um fazendeiro tem a opção de cultivar trigo e batatas. Se fizer sol, cada hectare gerará um lucro de 200 se plantado com trigo e de 100 se plantado com batata. Se chover cada hectare de trigo gerará um lucro de 120 e cada hectare de batata gerará um lucro de 200. A utilidade do fazendeiro é dada por $U(Y) = \ln Y$, sendo Y o lucro obtido. As probabilidades de fazer sol e de chover são iguais. Que proporção de sua terra o fazendeiro deverá destinar ao plantio de cada produto?

Resposta: 75% de trigo e 25% de batata.

Estrutura da aula

Justiça atuarial

Loterias atuarialmente justas

Loterias atuarialmente justas são loterias que geram um ganho esperado líquido igual a zero.

Exemplos

1. Não pagar nada para entrar no seguinte jogo: se o resultado do lançamento de uma moeda não viciada for cara, você receberá R$10,00, se for coroa, você pagará R$10,00.
2. Um seguro com preço de R$1.000,00 contra o roubo de um automóvel que vale R$10.000,00 cuja probabilidade é de 10%.

Quanto segurar

Suponha que um consumidor avesso ao risco tenha uma riqueza w que poderá ser reduzida de um valor L, por exemplo, em virtude do roubo de seu automóvel, com probabilidade π. Se uma seguradora oferecer segurar qualquer parcela dessa perda a uma taxa atuarialmente justa, ou seja, cobrando $\gamma = \pi$ reais por real segurado, quanto esse consumidor deverá segurar?

Solução (a)

Seja K o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K - \gamma K) + (1 - \pi)(w - \gamma K)$$

Simplificando,

$$w_e = w - \pi(L - K) - \gamma K$$

Como, por hipótese, $\gamma = \pi$,

$$w_e = w - \pi L$$

Portanto, a riqueza esperada não é afetada pelo valor segurado K, caso o seguro seja atuarialmente justo.

Solução (b)

- Caso o consumidor segure todo o valor L, todo o risco será eliminado.
- Qualquer outro valor para L envolverá algum risco, pois sua riqueza em caso de ocorrência da perda será diferente de sua riqueza caso essa perda não ocorra.
- Como o consumidor é avesso ao risco e como o valor esperado da riqueza não é afetado, quando $\gamma = \pi$, pela escolha de K. Ele deve preferir $K = L$ a qualquer outra alternativa.

Quando investir em um ativo de risco?

Um consumidor com aversão a risco pode dividir sua riqueza w em dois ativos: um livre de risco e com retorno r^f e outro ativo que dará um retorno r^0 com probabilidade π e um retorno r^1 com probabilidade $1 - \pi$. Sob que condições ele deverá investir parte de sua riqueza no ativo com risco?

Solução (a)

Sejam x a parcela de sua riqueza que o consumidor investe no ativo de risco, $\rho^f = 1 + r^f$, $\rho^0 = 1 + r^0$ e $\rho^1 = 1 + r^1$. Então:

$$\begin{aligned} UE = & \pi U\left(\rho^f(1-x)w + \rho^0 xw\right) \\ & + (1-\pi)U\left(\rho^f(1-x)w + \rho^1 xw\right) \end{aligned}$$

Se UE for crescente em relação a x em $x = 0$, o consumidor deve investir parte de sua riqueza no ativo de risco.

$$\begin{aligned} \frac{\partial UE}{\partial x} = & w\left[\pi(\rho^0 - \rho^f)U'\left(\rho^f(1-x)w + \rho^0 xw\right)\right. \\ & \left. + (1-\pi)(\rho^1 - \rho^f)U'\left(\rho^f(1-x)w + \rho^1 xw\right)\right] \end{aligned}$$

Calculando em $x = 0$

$$\frac{\partial UE(x=0)}{\partial x} = w\{[\pi\rho^0 + (1-\pi)\rho^1] - \rho^f\}U'(\rho^f w)$$

Solução (b)

Portanto, vale a pena investir mais do que zero no ativo de risco caso

$$\pi\rho^0 + (1-\pi)\rho^1 > \rho^f$$

isto é, caso

$$\pi r^0 + (1-\pi)r^1 > r^f.$$

Ou seja , sempre que o retorno esperado do ativo com risco for maior do que o retorno do ativo livre de risco.

Estrutura da aula

Distribuições paramétricas

- Algumas distribuições de probabilidade são perfeitamente descritas por um ou mais parâmetros. Por exemplo, a distribuição normal é totalmente descrita por sua média e por seu desvio padrão.
- Nesse caso, pode-se pensar uma função de utilidade que tenha como argumento esses parâmetros.

Utilidade média variância

- Função de utilidade decorrente de uma alocação de riqueza: $U(\mu, \sigma)$ na qual μ é o retorno esperado da riqueza e σ é o desvio padrão (uma medida de risco).
- Deve-se esperar, para um consumidor com aversão ao risco, que μ seja um bem e σ seja um mal.

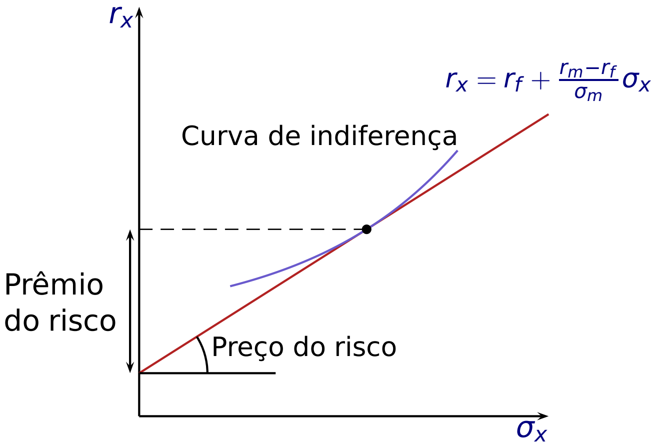
Exemplo: Carteira de investimento com um ativo com risco

- Suponha um consumidor que deve alocar sua riqueza em dois ativos: um livre de risco com rentabilidade r_f e um com risco, rentabilidade esperada r_m e desvio padrão σ_m.
- Caso o consumidor opte por aplicar uma parcela x de sua renda no ativo com risco, ele terá uma carteira de investimentos com:
  - Rentabilidade esperada: $r_x = xr_m + (1-x)r_f$
  - Desvio padrão: $\sigma_x = x\sigma_m$
- A relação entre r_x e x será

$$r_x = r_f + \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}\sigma_x$$

- $(r_m - r_f)/\sigma_m$ é chamado preço do risco; $[(r_m - r_f)/\sigma_m]\sigma_x$ é o prêmio do risco.

Equilíbrio


r_x
$r_x = r_f + \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}\sigma_x$
Curva de indiferença
Prêmio do risco
Preço do risco
σ_x

Alavancagem financeira

Caso seja possível tomar recursos emprestados à taxa de juros r_f, então, o investidor poderá escolher $x > 1$ tomando emprestado um valor igual a $x - 1$ vezes sua riqueza e investindo toda sua riqueza mais o valor emprestado no ativo com risco. Sua rentabilidade esperada será

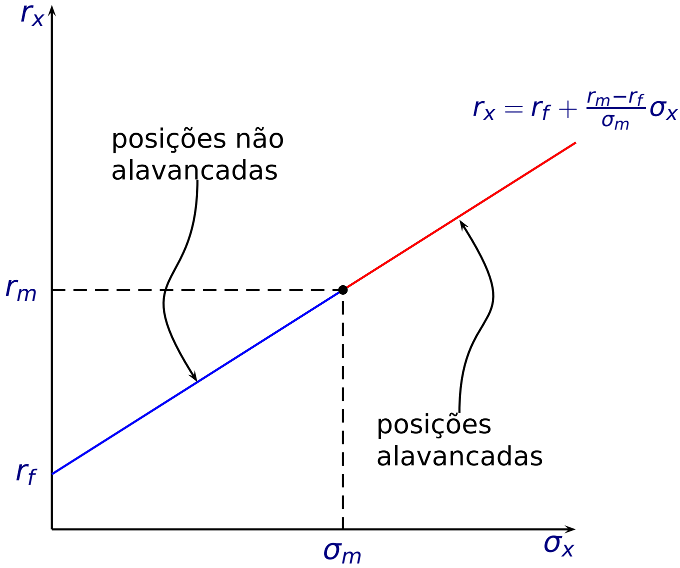
$$r_x = xr_m - (x-1)r_f = xr_m + (1-x)r_f.$$

O desvio padrão de sua rentabilidade será

$$\sigma_x = x\sigma_m$$

Consequentemente, a linha de mercado continua além do ponto descrevendo a rentabilidade e o risco do ativo de risco.

Alavancagem financeira – representação gráfica



Escolha entre dois ativos

Hipóteses

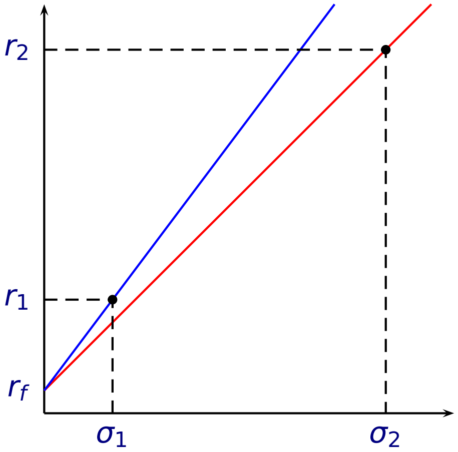
- Dois ativos com risco com rentabilidades esperadas r_1 e r_2 e variâncias σ_1^2 e σ_2^2 e um ativo livre de risco com rentabilidade r_f.
- Só é possível criar portifólios contendo apenas um ativo de risco combinado com o ativo livre de risco.
- É possível obter recursos extras à taxa r_f

Principal conclusão

Deverá ser escolhido o ativo de risco que paga o maior preço do risco. Por exemplo, para que o ativo a seja escolhido, é preciso que

$$\frac{r_1 - r_f}{\sigma_1} \geq \frac{r_2 - r_f}{\sigma_2}$$

Ilustração: Ativo 1 domina o ativo 2



Combinando dois ativos com risco

Ativos iniciais

Ativo	rent. esperada	variância
1	$E(\tilde{r}_1) = r_1$	${\sigma_1}^2$
2	$E(\tilde{r}_2) = r_2$	${\sigma_2}^2$

Portfólio composto

$$z = (\alpha, 1 - \alpha)$$

sendo que α ($0 \leq \alpha \leq 1$) representa a participação em valor do ativo 1 no portfólio. Consequentemente esse ativo terá

Retorno esperado $E(\tilde{r}_z) = r_z = \alpha r_1 + (1 - \alpha) r_2$

Variância ${\sigma_z}^2 = \alpha^2 {\sigma_1}^2 + (1 - \alpha)^2 {\sigma_2}^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{1,2}$

Redução de risco via diversificação

Lembrando que

$$\sigma_{1,2} \leq \sigma_1 \sigma_2$$

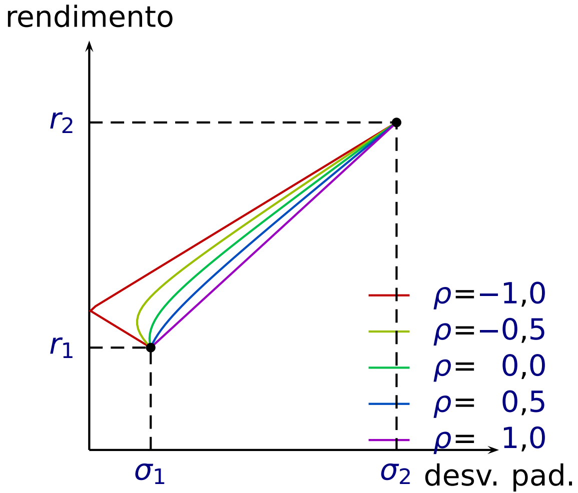
Chegamos a

$$\begin{aligned}\sigma_z{}^2 &= \alpha^2 \sigma_1{}^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_2{}^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{1,2} \\ &\leq \alpha^2 \sigma_1{}^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_2{}^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 \\ &= [\alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2]^2\end{aligned}$$

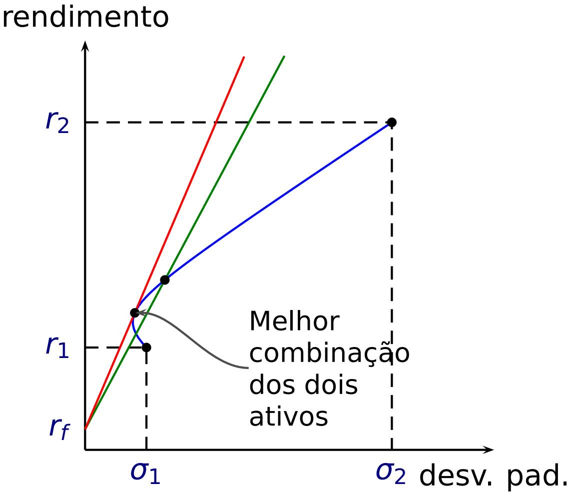
Consequentemente,$\sigma_z \leq \sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2$.
Em particular, caso tenhamos $r_1 = r_2 = \bar{r}$ e $\sigma_1 = \sigma_2 = \bar{\sigma}$ com $\tilde{r}_1$ e $\tilde{r}_2$ não apresentando correlação linear perfeita e positiva ($\sigma_{1,2} < \sigma_1\sigma_2$), teremos

$$\sigma_z < \bar{\sigma}$$

Diversificação: representação gráfica



Melhor combinação de dois ativos com risco



A fronteira eficiente

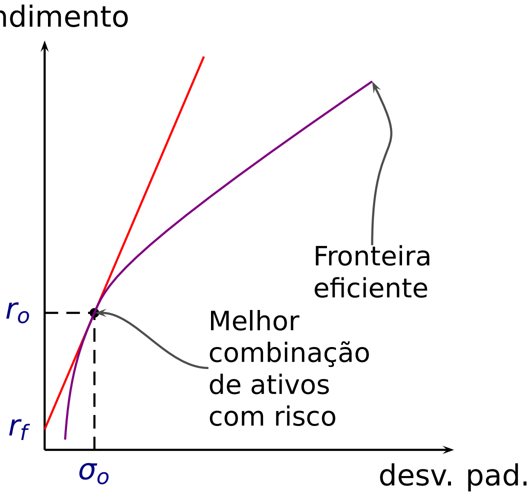
Definição

A fronteira eficiente ou conjunto eficiente de Markowitz é o conjunto de todos os portfólios de ativos com risco que oferecem a maior rentabiliade possível dado o seu risco.

Propriedade importante

Devido ao fato de que o risco é reduzido quando dois ativos são combinados, a fronteira eficiente deve formar concavidade à direita.

A melhor combinação de ativos



Fronteira eficiente e um ativo individual – I

Sejam

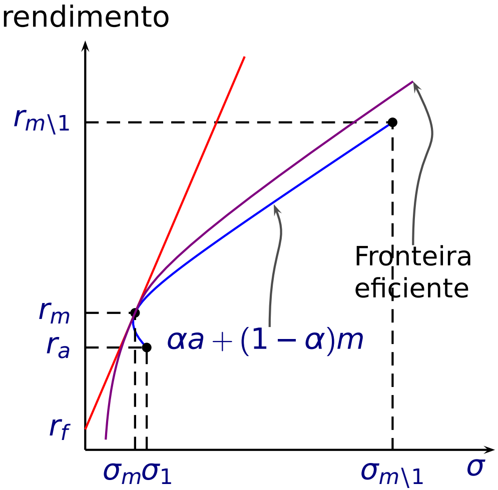
- $\mathbf{m} = (s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n)$ o portfólio de ativos com risco ótimo no qual $\sum_{i=1}^{n} s_i = 1$
- r_m o retorno esperado de m e σ_m o desvio padrão desse retorno.
- $\mathbf{a} = (1, 0, \ldots, 0)$ um portfólio composto apenas pelo ativo 1, de tal sorte que seu retorno esperado é r_1 com desvio padrão σ_1
- $\mathbf{x}(\alpha) = \alpha\mathbf{a} + (a - \alpha)\mathbf{m}$

Fronteira eficiente e um ativo individual – II

Nessas condições teremos

- $x(0) = m$ e $x(-\frac{s_1}{1-s_1}) = (0, \frac{1}{1-s_1}s_2, \frac{1}{1-s_1}s_3, \ldots \frac{1}{1-s_1}s_n) = m\backslash 1$
- O retorno esperado de $x(\alpha)$ será $r_\alpha = \alpha r_1 + (1-\alpha)r_m$
- O desvio padrão será $\sigma_\alpha = \sqrt{\alpha^2 r_1^2 + (1-\alpha)^2 r_m^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{1,m}}$
- A curva que descreve a trajetória de $(\sigma_\alpha, r_\alpha)$ com respeito a variações em α nunca ficará à direita da fronteira eficiente ($x(\alpha)$ é no máximo eficiente) e tocará essa fronteira quando $\alpha = 0$ ($x(0) = m$ é eficiente).
- Assim, essa curva deverá ser tangente à fronteira eficiente no ponto (σ_m, r_m)

Fronteira eficiente e um ativo individual – III



Relação entre a fronteira eficiente e um ativo individual – IV

As inclinações das duas curvas

- A inclinação da fronteira eficiente no portfólio ótimo é

$$\frac{r_m - r_f}{\sigma m} \tag{1}$$

- A inclinação da curva azul é $\frac{dr_\alpha/d\alpha}{d\sigma_\alpha/d\alpha}$

$$= \frac{\frac{d}{d\alpha}(\alpha r_1 + (1-\alpha r_m))}{\frac{d}{d\alpha}\sqrt{\alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_m^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{1,m}}}$$

$$= \frac{r_1 - r_m}{\frac{\alpha\sigma_1^2 - (1-\alpha)\sigma_m^2 + \sigma_{m,1} - 2\alpha\sigma_{m,1}}{\sqrt{\alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_m^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{1,m}}}} \tag{2}$$

Relação entre a fronteira eficiente e um ativo individual – V

Quando $\alpha = 0$, (1) é igual a (2), assim,

$$\frac{r_1 - r_m}{\frac{\sigma_{m,1}}{\sigma_m} - \sigma_m} = \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}$$

Resolvendo para r_1, obtemos

$$r_1 = r_f + \frac{\sigma_{m,1}}{\sigma_m^2}(r_m - r_f)$$

Convencionando $\beta = \frac{\sigma_{m,1}}{\sigma_m^2}$, ficamos com

$$r_1 = r_f + \beta(r_m - r_f)$$

Modelo CAPM

Hipóteses

Os mercado são perfeitamente competitivos, a informação é comum, todos os investidores são aversos a risco e estimam as mesmas distribuições de probabilidade para todos os ativos e é possível emprestar e tomar emprestado à taxa r_f.

Principal conclusão

Nessas condições, para todos os investidores, o portfólio ótimo dos ativos com risco é o portfólio de mercado, ou seja cada ativo deve participar, em valor, do portfólio ótimo na mesma proporção que ele participa, em valor, do mercado.

Modelo CAPM – a linha de mercado