UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto – Departamento de Economia

REC0224 – MICROECONOMIA II – SEGUNDA PROVA.

ROBERTO GUENA DE OLIVEIRA

4 de janeiro de 2010

(1) Um mercado é dividido entre duas empresas, que produzem um bem homogêneo. As duas empresas têm funções de custo iguais dadas por $c_i = y_i$ na qual y_i é a quantidade produzida pela empresa i $(i = 1, 2)$. A função de demanda pelo produto das duas empresas é $x = 25 - p$ na qual x é a quantiade demandada. Encontre as quantidades a serem produzidas por empresa bem como o preço ao qual o produto será ofertado e o lucro de cada empresa quando o mercado composto por essas duas empresas encontra-se:
   (a) em equilíbrio de Cournot;
   (b) em equilíbrio de Satackelberg, sendo a empresa 1 a empresa líder.

SOLUÇÃO

(a) O lucro da empresa 1 é dado por

$$\pi_1 = p\,y_1 - c_1 = [25 - (y_1 + y_2)]y_1 - y_1$$

no qual p é o preço de demanda. É função de reação dessa empresa é encontrada quando maximizamos seu lucro dada a produção da empresa 2. A condição de primeira [1] ordem para esse máximo é

$$24 - 2y_1 - y_2 = 0.$$

Resolvendo essa condição para y_1, encontramos a função de reação da empresa 1:

$$y_1 = 12 - \frac{y_2}{2}.$$

De modo inteiramente análogo, chegamos à função de reação da empresa 2:

$$y_2 = 12 - \frac{y_1}{2}.$$

Encontramos as quantidades produzidas no equilíbrio de Cournot ao resolver o sistema de equações formado pelas duas funções de reação acima:

$$\begin{cases} y_1^c = 12 - \dfrac{y_2^c}{2} \\ y_2^c = 12 - \dfrac{y_1^c}{2} \end{cases} \Rightarrow y_1^c = y_2^c = 8$$

[1] Note que a condição de segunda ordem será atendida, pois a função de lucro π_1 é côncava em relação a y^1

O preço é encontrado fazendo $x = y_1^c + y_2^c$ na função de demanda:

$$16 = 25 - p^c \Rightarrow p^c = 9$$

Como cada empresa produz 8 unidades do bem a um custo igual a 8 e um preço igual a 9, o lucro de cada empresa será

$$\pi_1^c = \pi_2^c = 9 \times 8 - 8 = 64.$$

(b) No caso do modelo de Stackelberg, a empresa líder (empresa 1) decide quanto deverá produzir antecipando a reação da empresa seguidora (empresa 2). Assim, ela deverá escolher a quantidade que maximiza seu lucro, $\pi_1 = [25 - (y_1 + y_2)]y_1 - y_1$ dado que ela antecipa $y_2 = 12 - {}^{y_1}/_2$. Incorporando a função de reação da empresa 2 na função de lucro da empresa 1, obtemos

$$\pi_1 = \left[25 - \left(y_1 + 12 - \frac{y_1}{2}\right)\right] y_1 - y_1 = 12y_1 - \frac{y_1^2}{2}.$$

No equilíbrio de Stackelberg, a empresa 1 escolhe y_1 de modo a maximizar esse lucro. Derivando essa função em relação a y_1 e igualando a zero, obtemos a quantidade y_1^s que ela irá produzir:

$$y_1^s = 12.$$

Substituindo esse valor na função de reação da empresa 2, obtemos a quantidade a ser produzida por essa empresa:

$$y_2^s = 12 - \frac{12}{2} = 6.$$

O preço no equilíbrio de Stackelberg é obtido substituindo x por $y_1^s + y_2^s = 18$:

$$18 = 25 - p^s \Rightarrow p^s = 7.$$

O lucro de cada empresa será, portanto,

$$\pi_1^s = 7 \times 12 - 12 = 72$$

e

$$\pi_2^s = 7 \times 6 - 6 = 36.$$

(2) Suponha agora que as empresas do exercício anterior percebam que elas competirão repetidamente, de período em período, sob as mesmas condições no mesmo mercado. Suponha também que elas tentem um acordo de cartel no qual as duas empresas produzirão, a cada período, quantidades iguais calculadas de modo a maximizar o lucro conjunto dessas empresas. Suponha adicionalmente que cada empresa anuncie que jogará uma estratégia do gatilho na qual iniciará produzindo a quantidade de cartel, continuará produzindo essa quantidade em qualquer período caso a outra empresa também tenha produzido a quantidade de cartel em todos os períodos até então, e passará a produzir, para sempre, a quantidade de equilíbrio de Cournot a partir do período subsequente ao qual a outra empresa deixe de produzir a quantidade de cartel.

(a) Calcule a quantidade que cada empresa produzirá, o preço do produto e o lucro de cada empresa, caso ambas cumpram o acordo de cartel.

(b) A quantidade que uma empresa deverá produzir caso decida trair o acordo, em determinado período, e suponha que a outra empresa vá produzir a quantidade de cartel. Calcule também qual será o preço do produto, no período em que ocorre a traição, assim como o lucro das duas empresas.

(c) Qual o valor máximo para a taxa de desconto, ou, se preferir, o valor mínimo para o fator de desconto, para o qual o cartel é estável?

SOLUÇÃO

(a) O lucro conjunto das duas empresas é dado por

$$\pi = [25 - (y_1 + y_2)](y_1 + y_2) - (y_1 + y_2).$$

De acordo com o enunciado do exercício, no acordo de cartel, as duas empresas produzirão a mesma quantidade. Chamemos essa quantidade de y^m. Substituindo $y_1 = y_2 = y^m$ na expressão do lucro do cartel, ficamos com

$$\pi = (25 - 2y^m)y^m - y^m.$$

y^m deverá ser escolhido de modo a maximizar o lucro do cartel e, portanto, deve satisfazer a condição de máximo de primeira ordem

$$24 - 4y^m = 0 \Rightarrow y^m = 6.$$

Substituindo $x = 2y^m = 12$ na função de demanda, encontramos o preço de cartel p^m:

$$12 = 25 - p^m \Rightarrow p^m = 13.$$

O lucro de cada empresa no cartel será dado por

$$\pi_1^m = \pi_2^m = p^m y^m - y^m = 12 \times 6 - 6 = 72.$$

(b) Chamemos de y^t, a quantidade que maximiza o lucro de uma empresa ao maximizar seu lucro em um período traindo o acordo de cartel. Chamemos também de p^t o preço que prevalecerá em caso de traição, de π^t o lucro que será obtido pela empresa traidora e de π^d o lucro a ser obtido pela empresa traída. A empresa que violar o acordo de cartel deverá produzir sobre sua função de reação supondo, conforme indica o enunciado do exercício, que a outras empresa continuará a produzir a quantidade de cartel:

$$y^t = 12 - \frac{y^m}{2} = 12 - \frac{6}{2} = 9.$$

Substituindo x por $y^t + y^m = 15$ na função de demanda, encontramos o preço p^t ao qual o produto dessas empresas será vendido em caso de traição:

$$15 = 25 - p^t \Rightarrow p^t = 10.$$

A esse preço, o lucro da empresa traidora será

$$\pi^t = p^t y^t - y^t = 10 \times 9 - 9 = 81.$$

Já o lucro da empresa traída será

$$\pi^d = p^t y^m - y^m = 10 \times 6 - 6 = 54.$$

(c) O cartel será estável caso o ganho de lucro obtido com a traição do cartel em um primeiro momento não compense a perda de lucro decorrente da volta ao equilíbrio de Cournot nos períodos seguintes. Conforme vimos no item anterior, no caso de cartel, o lucro de cada empresa é $\pi^m = 72$, no caso de traição, o lucro da empresas traidora passará para $\pi^t = 81$ no momento da traição e, no caso do equilíbrio de Cournot, o lucro de cada empresa é $\pi^c = 64$. O ganho imediato de uma empresa ao violar o acordo de cartel é $\pi^t - \pi^m = 81 - 72 = 9$, e a perda de lucro nos períodos subsequentes será $\pi^m - \pi^c = 72 - 64 = 8$. O cartel será estável, caso esse ganho imediato não seja superior ao valor presente das perdas de lucro nos períodos subsequentes. Chamando de r ($r \geq 0$) a taxa de desconto da empresa, isso equivale a dizer que a condição para a estabilidade do cartel é que

$$9 \leq \frac{8}{r} \Rightarrow r \leq \frac{8}{9}.$$

Caso prefira calcular sua resposta em termos do fator de desconto $\delta = {}^1/_{(1+r)}$, basta expressar a condição de equilíbrio como

$$9 \leq 8\frac{\delta}{1-\delta} \Rightarrow \delta \geq \frac{9}{17}.$$

(3) Um jogador de futebol deve cobrar um penalty. Suponha que ele tenha apenas duas estratégias: chutar a bola no lado direito do gol ou chutar a bola no lado esquerdo do gol. O goleiro não tem tempo para determinar de que lado o jogador chutará a bola. Assim, ele deve escolher para que lado pular sem saber qual será a direção do chute. Suponha que, sempre que o goleiro adivinhe corretamente o lado do chute, ele seja capaz de fazer a defesa. O batedor possui um tiro certeiro quando chuta no lado direito, mas não é tão bom quando chuta do lado esquerdo. Se o batedor chutar do lado direito do gol e o goleiro pular para o lado esquerdo, a bola entrará com 100% de certeza. Se o batedor chutar do lado esquerdo do gol e o goleiro pular para o lado direito, a bola entrará no gol com uma probabilidade de 50%. Encontre o equilíbrio de Nash em estratégias mistas desse jogo.

Solução

O objetivo do batedor é aumentar a probabilidade de que a bola entre no gol. Essa probabilidade é, portanto, o *payoff* do batedor. Já o *payoff* do goleiro é a probabilidade com que a bola não entre no gol. Abaixo, mostramos a representação estratégica desse jogo:

		Goleiro: Esquerda	Goleiro: Direita
Batedor	Esquerda	$0, 1$	$1/2, 1/2$
	Direita	$1, 0$	$0, 1$

Note que o jogo não possui equilíbrio de Nash em estratégias puras. Portanto, qualquer equilíbrio de Nash em estratégias mistas deve ser não degenerado.

Para encontrar esse equilíbrio, lembremo-nos que, nele, cada jogador deve estar indiferente entre as estratégias puras que joga com probabilidade positiva. Assim, no equilíbrio de Nash em estratégias mistas, o batedor será indiferente entre chutar à direita ou à esquerda e o goleiro será indiferentes entre pular à direita ou à esquerda.

Chamemos de π_b a probabilidade com que o batedor chuta à esquerda e de π_g a probabilidade com que o goleiro pula à esquerda. No equilíbrio de Nash, pi_g deve ser tal que o ganho esperado do batedor ao chutar à esquerda seja igual ao seu ganho esperado ao chutar à direita:

$$0 \times \pi_g + \frac{1}{2} \times (1 - \pi_g) = 1 \times \pi_g + 0 \times (1 - \pi_g) \Rightarrow \pi_g = \frac{1}{3}.$$

Também no equilíbrio de Nash, π_b deve ser tal que o goleiro fique indiferente entre pular à esquerda ou à direita:

$$1 \times \pi_b + 0 \times (1 - \pi_b) = \frac{1}{2} \times \pi_b + 1 \times (1 - \pi_b) \Rightarrow \pi_b = \frac{2}{3}.$$

Assim, o batedor deve chutar à esquerda com probabilidade $^2/_3$ e o goleiro deve pular à esquerda com igual probabilidade.[2]

(4) Dois indivíduos vivem em uma ilha e possuem funções de utilidade $U_1(x_1, y_1) = x_1 y_1$ e $U_2(x_2, y_2) = \min\{x_2, y_2\}$ nas quais U_i é a utilidade do indivíduo i $(i = 1; 2)$ e x_i e y_i são as quantidades consumidas dos dois únicos bens dessa economia x e y. O indivíduo 1 possui uma dotação inicial de 4 unidades do bem x e 2 unidades do bem y e o indivíduo 2 possui uma dotação inicial de 2 unidades do bem x e 4 unidades do bem y. Determine o preço relativo e a alocação de equilíbrio competitivo para essa economia.

Solução

Pela lei de Walras, sabemos que, caso um mercado esteja em equilíbrio, o outro mercado também estará em equilíbrio. Olhemos, portanto o mercado 1. O indivíduo 1 apresenta uma função de demanda do tipo Cobb-Douglas e, portanto a sua função de demanda pelo bem 1 será dada por

$$x_1^1(p_1, p_2) = \frac{1}{2} \frac{4p_1 + 2p_2}{p_1}$$

O indivíduo 2 considera os dois bens complementos perfeitos e, portanto deverá apresentar uma função de demanda com a forma

$$x_1^2(p_1, p_2) = \frac{2p_1 + 4p_2}{p_1 + p_2}$$

A condição de equilíbrio requer que a soma das quantidades demandadas de um bem seja igual à soma de suas dotações iniciais, ou seja

$$x_1(p_1, p_2) + x_2(p_1, p_2) = 6 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{4p_1 + 2p_2}{p_1} + \frac{2p_1 + 4p_2}{p_1 + p_2} = 6$$

Resolvendo essa equação para o preço relativo, encontramos

$$\frac{p_2}{p_1} = 1$$

[2] Esse exercício é igual a um divulgado em lista de exercícios. No gabarito dessa lista, definimos π_b como a probabilidade com que o batedor chuta à direita e não, como fizemos aqui, à esquerda. Por essa razão, nesse gabarito, temos $\pi_b = {}^1/_3$.

Desse modo, teremos, na alocação de equilíbrio

$$x_1^1 = x_1^2 = 3 \qquad \text{e} \qquad x_2^1 = x_2^2 = 3$$

(5) Considere uma economia com 1.000 consumidores idênticos e 1.000 firmas idênticas na qual há apenas dois bens: tempo disponível para lazer e bem de consumo. O bem de consumo pode ser produzido pelas firmas idênticas de acordo com a função de produção $y(h) = 7h - h^2$ na qual $y(h)$ é o produto da empresa e h é o número de horas de trabalho contratadas pela empresa. Cada consumidor tem uma quota de $^1/_{1.000}$ de participação acionária em cada uma das 1.000 empresas. Todos os consumidores são iguais, possuindo uma dotação inicial de tempo de 12 horas que podem ofertar no mercado de trabalho ou consumir como tempo disponível para lazer. A função de utilidade de cada um desses consumidores é dada por $U(c,t) = {}^{10}/_{3} \ln c + t$ na qual c é o consumo do bem de consumo e t é o consumo de tempo na forma de lazer.

(a) Determine quanto uma firma típica deve produzir em função da taxa real de salário w.

(b) Determine, para um consumidor típico, a função de demanda pelo bem de consumo em função de w.

(c) Com base nos resultados dos items anteriores, determine qual a taxa de salário de equilíbrio geral nessa economia.

SOLUÇÃO

(1) Cada empresa deverá demandar trabalho até o ponto em que a produtividade marginal desse fator de produção se iguale à sua remuneração real, ou seja até que -

$$7 - 2h = w$$

Resolvendo essa igualdade para h obtemos a função de demanda pelo fator trabalho por parte de uma firma típica,

$$h(w) = \frac{7-w}{2}$$

Substituindo esse resultado na função de produção, obtém-se o produto da firma em função do salário real, qual seja

$$y(h(w)) = 7\frac{7-w}{2} - \left(\frac{7-w}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(49 - w^2\right)$$

(2) Sabemos que, no equilíbrio, o consumidor deve igualar sua taxa marginal de substituição ao preço relativo. Assim, a condição de maximização de utilidade para um consumidor típico é

$$\frac{\frac{\partial U(c,t)}{\partial c}}{\frac{\partial U(c,t)}{\partial t}} = \frac{1}{w} \Rightarrow \frac{10}{3c} = \frac{1}{w}$$

Resolvendo para c, obtemos a seguinte função de demanda por bens de consumo por parte do consumidor típico

$$c(w) = \frac{10}{3}w$$

(3) Pela lei de Walras, sabemos que, se o mercado do bem de consumo estiver em equilíbrio, então o outro mercado dessa economia, o de trabalho, também estará em equilíbrio. A oferta agregada de bens de consumo ($Y(w)$) é obtida multiplicando-se por 1000, o número de firmas, a oferta que já determinamos de uma firma típica:

$$Y(w) = 250\left(49 - w^2\right)$$

A demanda agregada ($C(w)$) é obtida multiplicando-se a demanda obtida para um consumidor típico pelo número de consumidores, ou seja, 1.000:

$$C(w) = \frac{10.000}{3}w$$

Igualando-se a oferta agregada à demanda agregada, obtemos a condição de equilíbrio geral da economia:

$$250\left(49 - w^2\right) = \frac{10.000}{3}w$$

Resolvendo para w e descartando a raiz negativa, obtemos o salário que forma o equilíbrio geral dessa economia, qual seja,

$$w = 3.$$