Exercícios de equilíbrio geral

Roberto Guena de Oliveira

novembro de 2009

1 Questões

Questão 1

Dois indivíduos vivem isolados em uma ilha na qual há apenas a possibilidade de consumo de dois bens os quais eles são incapazes de produzir. Suas funções de utilidade são $U_1(x_1, y_1) = x_1^4 y_1^6$ e $U_2(x_{2,} y_2) = x_2^3 y_2^2$ nas quais U_i é a utilidade do indivíduo i e x_i e y_i são as quantidades consumidas dos dois únicos bens consumidos x e y. O indivíduo 1 possui uma dotação inicial de 4 unidades do bem x e 2 unidades do bem y e o indivíduo 2 possui uma dotação inicial de 2 unidades do bem x e 4 unidades do bem y. Determine o preço relativo, expresso como a razão entre o preço do bem x e o preço do bem y, e a alocação de equilíbrio competitivo para essa economia.

Questão 2

Considere uma economia de trocas com apenas 3 bens, os bens 1, 2 e 3. Quando os preços desses bens são, respectivamente, R$ 4,00, R$ 3,00 e R$ 1,00, o excesso de demanda pelo bem 1 é igual a 3 e o excesso de demanda pelo bem 2 é igual a -4. Determine o excesso de demanda pelo bem 3.

Questão 3

Dois indivíduos vivem em uma ilha e possuem funções de utilidade $U_1(x_1, y_1) = x_1 y_1$ e $U_2(x_2, y_2) = \min\{x_2, y_2\}$ nas quais U_i é a utilidade do indivíduo i ($i = 1; 2$) e x_i e y_i são as quantidades consumidas dos dois únicos bens dessa economia x e y. O indivíduo 1 possui uma dotação inicial de 4 unidades do bem x e 2 unidades do bem y e o indivíduo 2 possui uma dotação inicial de 2 unidades do bem x e 4 unidades do bem y. Determine o preço relativo e a alocação de equilíbrio competitivo para essa economia.

Questão 4

A lei de Walras diz que, desde que os consumidores demandem cestas de consumo sobre suas linhas de restrição orçamentária, a soma dos valores dos excessos de demanda agregada de todos os mercados de uma economia é identicamente igual a zero. Demonstre essa lei para uma economia de trocas com dois consumidores e dois bens.

Questão 5

Suponha uma economia com dois consumidores e dois produtos, os bens x e y. A função de utilidade do consumidor 1 é $U_1(x_1, y_1) = x_1^3 y_1^2$. A função de utilidade do consumidor 2 é $U_2(x_2, y_2) = x_2^2 y_2^3$. Os dois produtos são produzidos por uma firma que emprega quantidades fixas de fatores de produção, sendo que a fronteira de possibilidades de produção para essa firma é dada pela expressão $y^2 + x^2 = 81$. A firma escolhe a combinação de produto que maximiza o seu lucro. Cada produto é então distribuído em quantidades iguais entre os dois consumidores que podem, após essa distribuição, trocar os bens ao preço relativo $p(= \frac{p_x}{p_y})$. Em outras palavras, sendo $x(p)$ e $y(p)$ as quantidades produzidas dos bens x e y que maximizam o lucro da empresa, cada consumidor receberá uma quantidade $\frac{1}{2}x(p)$ do bem x e uma quantidade igual a $\frac{1}{2}y(p)$ do bem y e pode trocar esses bens com o outro consumidor conforme o preço relativo p.

1. Determine as funções de oferta $x(p)$ e $y(p)$.
2. Suponha, por um momento, que cada consumidor tenha uma quantidade $\frac{1}{2}\bar{x}$ do bem x e uma quantidade $\frac{1}{2}\bar{y}$ do bem y, e possa trocar esses bens com o outro consumidor ao preço relativo p. Determine, em função de $\bar{x}$ e de $\bar{y}$, o preço relativo que fará com que os excessos de demanda agregados pelos dois bens sejam nulos, isto é, o preço relativo de equilíbrio na troca entre os dois consumidores.
3. Na resposta que você encontrou para o item anterior, substitua $\bar{x}$ e $\bar{y}$ pelas funções que você encontrou no item (a) – $x(p)$ e $y(p)$ respectivamente – e determine o preço relativo, as quantidades produzidas de cada bem e as quantidades consumidas por consumidor de cada bem dessa economia.

Questão 6

Considere uma economia com 1.000 consumidores idênticos e 1.000 firmas idênticas na qual há apenas dois bens: tempo disponível para lazer e bem de consumo. O bem de consumo pode ser produzido pelas firmas idênticas de acordo com a função de produção $y(h) = 7h - h^2$ na qual $y(h)$ é o produto da empresa e h é o número de horas de trabalho contratadas pela empresa. Cada consumidor tem uma quota de 1/1.000 de participação acionária em cada uma das 1.000 empresas. Todos os consumidores são iguais, possuindo uma dotação inicial de tempo de 12 horas que podem ofertar no mercado de trabalho ou consumir como tempo disponível para lazer. A função de utilidade de cada um desses consumidores é dada por $U(c,t) = \frac{10}{3}\ln c + t$ na qual c é o consumo do bem de consumo e t é o consumo de tempo na forma de lazer.

1. Determine quanto uma firma típica deve produzir em função da taxa real de salário w.
2. Determine, para um consumidor típico, a função de demanda pelo bem de consumo em função de w.
3. Com base nos resultados dos items anteriores, determine qual a taxa de salário de equilíbrio geral nessa economia.

Questão 7

Considere uma economia com apenas um indivíduo e uma firma. O indivíduo consome dois bens cujas quantidades são notadas por x e y. O preço do bem x é p e o bem y tem preço unitário. A função de utilidade desse indivíduo é $U(x,y) = x\,y$. O indivíduo não possui dotação inicial alguma dos bens que ele consome, mas possui uma quantidade H do único fator de produção necessário à produção desses bens. Esse fator de produção é demandado pela firma, da qual o indivído é o único acionista, para ser empregado na produção de x e y. A função de produção de x é $f_x(h_x) = \ln(h_x + 1)$ e a função de produção de y é $f_x(h_y) = \ln(h_y + 1)$, sendo h_x e h_y as quantidades empregadas do único fator de produção na produção de x e y, respectivamente. Encontre, em função de H, as quantidades produzidas de cada bem no equilíbrio geral concorrencial e os preços p do bem x e w do fator de produção.

2 Soluções

Questão 1

Seja p o preço do bem x expresso em unidades do bem y, isto é, $p = p_x/p_y$. Notemos as funções de demanda do indivídio i ($i = 1, 2$) pelos bens x e y, respectivamente, por $x_i(p)$ e $y_i(p)$. Sabemos que, caso um indivíduo tenha suas preferências representadas por uma função de utilidade do tipo Cobb-Douglas, $U(x, y) = x^a y^b$, e assumindo que os valores são medidos em unidades do bem y ($p_y = 1$), suas funções de demanda pelos bens x e y serão, respectivamente,

$$x = \frac{a}{a+b}\frac{m}{p} \quad \text{e} \quad \frac{b}{a+b}m.$$

Sendo m o valor da renda monetária do consumidor, no caso em que ele possue uma renda monetária dada, ou de sua dotação incial, no caso em que ele possui uma dotação inicial de bens. No presente exercício o valor da dotação inicial do consumidor 1, expresso em unidades de y, visto que ele possue inicialmente 4 unidade de x e 2 unidade de y, é $m_x = 4p + 2$, e o valor da dotação inicial do consumidor 2, visto que ele possue 2 unidade de x e 4 unidade de y, é $m_y = 2p + 4$. Desse modo as funções de demanda do consumidor 1 pelos bens x e y serão dadas por, respectivamente

$$x_1(p) = \frac{2}{5}\frac{4p+2}{p} \quad \text{e} \quad y_1(p) = \frac{3}{5}(4p+2)$$

e as funções de demanda do consumidor 2 por esses bens serão

$$x_2(p) = \frac{3}{5}\frac{2p+4}{p} \quad \text{e} \quad y_2(p) = \frac{2}{5}(2p+4).$$

O equilíbrio será atingido quando a soma das quantidades demandadas pelo bem x for igual à soma das dotações iniciais desse bem, o mesmo acontecendo com o bem y. Assim, a condição de equilíbrio no mercado do bem x é

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}\frac{4p+2}{p} + \frac{3}{5}\frac{2p+4}{p} &= 6 \\ 14p + 16 &= 30 \\ p &= 1 \end{aligned}$$

Pela lei de Walras, sabemos que obteremos o mesmo preço de equilíbrio analisando o mercado do bem y. Substituindo esse preço nas funções de demanda, encontramos a alocação de equilíbrio dessa economia:

$$x_1 = 12/5,\ y_1 = 18/5,\ x_2 = 18/5 \text{ e } y_2 = 12/5.$$

Questão 2

Pela lei de Walras, a soma dos valores dos excessos de demanda agregada é identicamente igual a zero. Aplicando essa lei aos dados informados pela questão, obtemos

$$\begin{aligned} p_1 z_1 + p_2 z_2 + p_3 z_3 &= 0 \\ 3 \times 2 + 3 \times (-4) + 1 \times z_1 &= 0 \\ z_1 &= 6 \end{aligned}$$

Questão 3

Pela lei de Walras, sabemos que, caso um mercado esteja em equilíbrio, o outro mercado também estará em equilíbrio. Olhemos, portanto o mercado 1. O indivíduo 1 apresenta uma função de demanda do tipo Cobb-Douglas e, portanto a sua função de demanda pelo bem 1 será dada por

$$x_1^1(p_1, p_2) = \frac{1}{2} \frac{4p_1 + 2p_2}{p_1}$$

O indivíduo 2 considera os dois bens complementos perfeitos e, portanto deverá apresentar uma função de demanda com a forma

$$x_1^2(p_1, p_2) = \frac{2p_1 + 4p_2}{p_1 + p_2}$$

A condição de equilíbrio requer que a soma das quantidades demandadas de um bem seja igual à soma de suas dotações iniciais, ou seja

$$x_1(p_1, p_2) + x_2(p_1, p_2) = 6 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{4p_1 + 2p_2}{p_1} + \frac{2p_1 + 4p_2}{p_1 + p_2} = 6$$

Resolvendo essa equação para o preço relativo, encontramos

$$\frac{p_2}{p_1} = 1$$

Desse modo, teremos, na alocação de equilíbrio

$$x_1^1 = x_1^2 = 3 \qquad \text{e} \qquad x_2^1 = x_2^2 = 3$$

Questão 4

Sejam A e B os dois consumidores, (ω_1^A, ω_2^A) e (ω_1^B, ω_2^B) as dotações iniciais dos bens 1 e 2 possuídas pelos consumidores A e B e (x_1^A, x_2^A) e (x_1^B, x_2^B) as respectivas quantidades demandadas desses bens por esses consumidores. Sejam também $p_1 > 0$ e $p_2 > 0$ os preços dos bens 1 e 2, respectivamente. Queremos mostrar que

$$p_1[(x_1^A + x_1^B) - (\omega_1^A + \omega_1^B)] + p_2[(x_2^A + x_2^B) - (\omega_2^A + \omega_2^B)] = 0^1$$

dada a hipótese de que os consumidores demandam cestas sobre suas linhas de restrição orçamentárias, isto é, supondo que

$$p_1 x_1^A + p_2 x_2^A = p_1 \omega_1^A + p_2 \omega_2^A$$

e

$$p_1 x_1^B + p_2 x_2^B = p_1 \omega_1^B + p_2 \omega_2^B.$$

A demonstração é imediata: basta somar as duas igualdades acima (verdadeiras por hipótese) para obter:

$$p_1(x_1^A + x_1^B) + p_2(x_2^A + x_2^B) = p_1(\omega_1^A + \omega_1^B) + p_2(\omega_2^A + \omega_2^B)$$

e subtrair $p_1(\omega_1^A+\omega_1^B)+p_2(\omega_2^A+\omega_2^B)$ dos dois lados, chegando, assim, à igualdade procurada:

$$p_1[(x_1^A + x_1^B) - (\omega_1^A + \omega_1^B)] + p_2[(x_2^A + x_2^B) - (\omega_2^A + \omega_2^B)] = 0$$

Questão 5

1. Sabemos que a firma escolhe as quantidades produzidas dos dois bens de modo a igualar o módulo da taxa marginal de transformação ao preço relativo ($p = p_x/p_y$). A expressão da fronteira de possibilidades de produção pode ser reescrita para obtermos $y = \sqrt{81 - x^2}$. Derivando em relação a x, obtemos a taxa marginal de transformação

$$TMT = -\frac{x}{\sqrt{81 - x^2}} = \frac{x}{y}$$

Ao igualarmos o módulo dessa taxa marginal de transformação ao preço relativo $p = p_x/p_y$, obtemos

$$\frac{x}{\sqrt{81 - x^2}} = p \Rightarrow x = \frac{9p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

Substituindo esse resultado na expressão da fronteira de possibilidades de produção, obtemos

$$y = \frac{9}{\sqrt{1 + p^2}}$$

Assim, as funções de oferta são $x(p) = \frac{9p}{\sqrt{1+p^2}}$ e $y(p) = \frac{9}{\sqrt{1+p^2}}$.

[1] $(x_1^A+x_1^B)-(\omega_1^A+\omega_1^B)$ é o excesso de demanda agregada pelo bem 1 (z_1) e $(x_2^A+x_2^B)-(\omega_2^A+\omega_2^B)$ é o excesso de demanda agregada pelo bem 2, z_2.

2. As duas funções de utilidade são do tipo Coob-Douglas. As funções de demanda associadas a essas funções de utilidade nos são conhecidas. Sabemos que, dadas as dotações iniciais $\frac{1}{2}\bar{x}$ do bem x e $\frac{1}{2}\bar{y}$ do bem y para cada um dos consumidores, as quantidades demandadas serão dadas por

$$x_1(p_x, p_y) = \frac{3}{10}\left(\bar{x} + \frac{p_y}{p_x}\bar{y}\right) = \frac{3}{10}\left(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{p}\right)$$

$$x_2(p_x, p_y) = \frac{2}{10}\left(\bar{x} + \frac{p_y}{p_x}\bar{y}\right) = \frac{2}{10}\left(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{p}\right)$$

$$y_1(p_x, p_y) = \frac{2}{10}\left(\frac{p_x}{p_y}\bar{x} + \bar{y}\right) = \frac{2}{10}\left(p\bar{x} + \bar{y}\right)$$

e

$$y_2(p_x, p_y) = \frac{3}{10}\left(\frac{p_x}{p_y}\bar{x} + \bar{y}\right) = \frac{3}{10}\left(p\bar{x} + \bar{y}\right)$$

No equilíbrio, teremos $x_1(p_x, p_y) + x_2(p_x, p_y) = \bar{x}$ e $y_1(p_x, p_y) + y_2(p_x, p_y) = \bar{y}$. Sabemos, pela lei de Walras, que, quando uma dessas condições for obtida a outra estará automaticamente garantida. Usando então a segunda condição, obtemos

$$y_1(p_x, p_y) + y_2(p_x, p_y) = \bar{y}$$
$$\frac{2}{10}\left(p\bar{x} + \bar{y}\right) + \frac{3}{10}\left(p\bar{x} + \bar{y}\right) = \bar{y}$$
$$p = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

3. Se substituirmos $\bar{x}$ e $\bar{y}$ por $x(p) = \frac{9p}{\sqrt{1+p^2}}$ e $y(p) = \frac{9}{\sqrt{1+p^2}}$, obtemos a condição de equilíbrio geral da economia

$$\frac{\frac{9}{\sqrt{1+p^2}}}{\frac{9p}{\sqrt{1+p^2}}} = p$$
$$\frac{1}{p} = p \Rightarrow p = 1$$

Aplicando esse resultado nas funções de oferta obtidas no item (a) e nas funções de demanda obtidas no item (b), obtemos as quantidades de equilíbrio

$$x = 9\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y = 9\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = 27\frac{\sqrt{2}}{10} \qquad y_1 = 18\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$x_2 = 18\frac{\sqrt{2}}{10} \qquad y_2 = 27\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Questão 6

1. Cada empresa deverá demandar trabalho até o ponto em que a produtividade marginal desse fator de produção se iguale à sua remuneração real, ou seja até que -

$$7 - 2h = w$$

Resolvendo essa igualdade para h obtemos a função de demanda pelo fator trabalho por parte de uma firma típica,

$$h(w) = \frac{7-w}{2}$$

Substituindo esse resultado na função de produção, obtém-se o produto da firma em função do salário real, qual seja

$$y(h(w)) = 7\frac{7-w}{2} - \left(\frac{7-w}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(49 - w^2\right)$$

2. Sabemos que, no equilíbrio, o consumidor deve igualar sua taxa marginal de substituição ao preço relativo. Assim, a condição de maximização de utilidade para um consumidor típico é

$$\frac{\frac{\partial U(c,t)}{\partial c}}{\frac{\partial U(c,t)}{\partial t}} = \frac{1}{w} \Rightarrow \frac{10}{3c} = \frac{1}{w}$$

Resolvendo para c, obtemos a seguinte função de demanda por bens de consumo por parte do consumidor típico

$$c(w) = \frac{10}{3}w$$

3. Pela lei de Walras, sabemos que, se o mercado do bem de consumo estiver em equilíbrio, então o outro mercado dessa economia, o de trabalho, também estará em equilíbrio. A oferta agregada de bens de consumo ($Y(w)$) é obtida multiplicando-se por 1000, o número de firmas, a oferta que já determinamos de uma firma típica:

$$Y(w) = 250\left(49 - w^2\right)$$

A demanda agregada ($C(w)$) é obtida multiplicando-se a demanda obtida para um consumidor típico pelo número de consumidores, ou seja, 1.000:

$$C(w) = \frac{10.000}{3}w$$

Igualando-se a oferta agregada à demanda agregada, obtemos a condição de equilíbrio geral da economia:

$$250\left(49 - w^2\right) = \frac{10.000}{3}w$$

Resolvendo para w e descartando a raiz negativa, obtemos o salário que forma o equilíbrio geral dessa economia, qual seja,

$$w = 3.$$

Questão 7

Solução pelas condições de equilíbrio.

Nessa economia há três mercados: o mercado do bem x, o mercado do bem y e o mercado do fator de produção. Sejam, $x(p,w)$ e $y(p,w)$ as funções que descrevem a demanda do consumidor pelos bens x e y, respectivamente. Sejam também $h_x(p,w)$ e $h_y(p,w)$ as funções de demanda pelo fator de produção por parte da empresa para a produção dos bens x e y, respectivamente e $x_s(p,w)$ e $y_s(p,w)$ as funções de oferta desses dois bens. Considerando que a oferta do fator de produção é constante e igual a H, o equilíbrio geral dessa economia será estabelecido quando:

$$\begin{cases} x(p,w) = x_s(p,w) \\ y(p,w) = y_x(p,w) \\ h_x(p,w) + h_y(p,w) = H \end{cases} \tag{1}$$

Para resolver esse sistema de equações, precisamos, primeiramente, determinar as funções de demanda e oferta. Para tal, comecemos encontrando as condições de maximização de lucro da empresa. Visto que as funções de produção são côncavas, sabemos que a empresa maximiza seu lucro ao contratar o fator de produção até o ponto em que o valor de sua produtividade marginal iguala-se a seu preço. Desse modo determinamos a demanda do fator de produção pelo bem x fazendo

$$p f_x'(h_x) = w \Rightarrow \frac{p}{h_x + 1} = w \Rightarrow h_x(p,w) = \frac{p}{w} - 1. \tag{2}$$

Já a demanda para a produção do bem y é obtida fazendo

$$f_y'(h_y) = w \Rightarrow \frac{1}{h_y + 1} = w \Rightarrow h_y(p,w) = \frac{1}{w} - 1 \tag{3}$$

Ademais, dado que as quantidades do fator de produção empregadas na produção de x e y são dadas pelas funções de demanda $h_x(p,w)$ e $h_y(p,w)$ tais como aparecem em (2) e (3), as funções de oferta desses bens serão dadas por

$$x_s(p,w) = \ln\left(\frac{p}{w} - 1 + 1\right) = \ln(p) - \ln w \tag{4}$$

e

$$y_s(w) = \ln\left(\frac{1}{w} - 1 + 1\right) = -\ln w \tag{5}$$

O lucro da empresa será dado por

$$\begin{aligned}\pi(p,w) = px_s(p,w) + y_s(p,w) - w[h_x(p,w) + h_y(p,w)]\\ = p\ln\left(\frac{p}{w}\right) + \ln\left(\frac{1}{w}\right) - w\left(\frac{p+1}{w} - 2\right)\end{aligned} \tag{6}$$

Determinemos agora as demandas pelos bens x e y. Como nosso consumidor tem função de utilidade Cobb-Douglas com coeficientes unitários, sabemos que suas demandas por esses bens serão dadas por

$$x(p,w) = \frac{m}{2p}$$

e

$$y(p,w) = \frac{m}{2}$$

nas quais m é o valor de sua renda monetária dada pela soma do valor de sua dotação inicial wH mais o lucro obtido pela empresa, $\pi(p,w)$:

$$\begin{aligned}m(p,w) = wH + \pi(p,w)\\ = wH + p\ln\left(\frac{p}{w}\right) + \ln\left(\frac{1}{w}\right) - w[h_x(p,w) + h_y(p,w)]\\ = p\ln\left(\frac{p}{w}\right) + \ln\left(\frac{1}{w}\right) - w[h_x(p,w) + h_y(p,w) - H]\end{aligned} \tag{7}$$

Substituindo (7) nas funções de demanda pelos bens x e y ficamos com

$$x(p,w) = \frac{p\ln\left(\frac{p}{w}\right) + \ln\left(\frac{1}{w}\right) - w\left(\frac{p+1}{w} - 2\right)}{2p} \tag{8}$$

e

$$y(p,w) = \frac{p\ln\left(\frac{p}{w}\right) + \ln\left(\frac{1}{w}\right) - w\left(\frac{p+1}{w} - 2 - H\right)}{2} \tag{9}$$

Substituindo agora, (2), (3), (4), (5), (8) e (9) em (1), ficamos com o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{p\ln\left(\frac{p}{w}\right) + \ln\left(\frac{1}{w}\right) - w\left(\frac{p+1}{w} - 2\right)}{2p} = \ln p - \ln w \\ \dfrac{p\ln\left(\frac{p}{w}\right) + \ln\left(\frac{1}{w}\right) - w\left(\frac{p+1}{w} - 2 - H\right)}{2} = -\ln w \\ \dfrac{p+1}{w} - 2 = H \end{cases} \tag{10}$$

Substituindo a última equação nas duas primeiras, ficamos com

$$\begin{cases} \dfrac{p(\ln p - \ln w) - \ln w}{2p} = -\ln w \\ \dfrac{p(\ln p - \ln w) - \ln w}{2} = -\ln w \end{cases}$$

Simplificando a primeira equação, ficamos com

$$p \ln p = (p-1) \ln w. \tag{11}$$

O mesmo resultado é obtido ao simplificarmos a segunda equação. [2] A equação (11) tem uma solução óbvia em $p = 1$, caso em que os dois lados da equação igualam-se a zero. No nosso caso, essa solução é única. Isso porque, como o consumidor gasta metade de sua renda com a aquisição do bem y e, como em condições de equilíbrio o consumo desse bem deve igualar-se à sua oferta $y_s = -\ln w$, concluímos que $y > 0$ e, portanto, $\ln w < 0$. Reescrevamos, portanto, a (11) como

$$\ln p = \frac{p-1}{p} \ln w.$$

Como $\ln w < 0$, os dois lados dessa equação não podem igualar-se caso $p > 1$, pois, nesse caso, o lado esquerdo da equação será positivo e, o lado direito, negativo. Porém, eles tampouco podem igualar-se com $p < 1$, visto que, nesse caso, o lado esquerdo da equação será negativo e, o lado direito, positivo. Concluímos, assim, que, no equilíbrio geral, o preço do bem x deve ser $p = 1$.

Substituindo, assim $p = 1$ na terceira equação de (10), isto é na condição de equilíbrio no mercado do fator de produção, ficamos com

$$\frac{2}{w} - 2 = H \Rightarrow w = \frac{2}{H+2}$$

Finalmente, substituindo, $p = 1$ e $w = 2/(H+2)$ em (2) , em (3), em (4) e em (5), encontramos o emprego de equilíbrio do fator de produção:

$$h_x = h_y = \frac{H}{2}$$

e as quantidades de equilíbrio dos bens de consumo:

$$x = y = \ln(H+2) - \ln 2.$$

Solução pelas propriedades do equilíbrio geral.

Há um modo menos trabalhoso de se resolver esse exercício. Para tal, lembremos que, ao maximizar sua utilidade, o consumidor iguala o módulo de sua taxa

[2] Isso não é surpresa, pois sabemos que, havendo n mercados, as condições de equilíbrio provêem apenas $n-1$ equações independentes.

marginal de substituição, $|TMS|$, ao preço relativo dos dois bens p. Lembremos também que a firma, a fim de maximizar seu lucro, deve igualar o módulo da taxa marginal de transformação, $|TMT|$ ao preço relativo p. Portanto, quando equilíbrio geral é obtido, devemos ter $|TMS| = |TMT|$.

A taxa marginal de substituição é dada pela razão entre as utilidades marginais dos bens x e y:

$$|TMS| = \frac{UMg_x}{UMg_y} = \frac{y}{x}.$$

A taxa marginal de transformação é dada pela razão entre as produtividades marginais do fator de produção na produção de y e x:

$$|TMT| = \frac{f_y'(h_y)}{f_x'(h_x)} = \frac{h_x + 1}{h_y + 1}.$$

No equilíbrio geral, a quantidade produzida dos bens x e y devem igualar-se às quantidades consumidas desses bens, isto é, $x = f_x(h_x) = \ln(h_x + 1)$ e $y = f_y(h_y) = \ln(h_y + 1)$. Desse modo, a condição de igualdade entre a taxa marginal de substituição e a taxa marginal de transformação passa a ser

$$\frac{\ln(h_y + 1)}{\ln(h_x + 1)} = \frac{h_x + 1}{h_y + 1}$$

ou

$$(h_x + 1)\ln(h_x + 1) = (h_y + 1)\ln(h_y + 1)$$

ou ainda

$$\phi(h_x) = \phi(h_y) \tag{12}$$

sendo ϕ a função definida por $\phi(x) = (x + 1)\ln(x + 1)$. Note que, para $x \geq 0$, $\phi'(x) = \ln(x + 1) + 1 > 0$. Consequentemente, $\phi(x)$ é monotonamente crescente para $x \geq 0$. Como $h_x, h_y \geq 0$, concluímos que a igualdade (12) só pode ser obtida quando $h_x = h_y$. Assim, a empresa deve empregar iguais quantidades do fator de produção na produção do bem x e na produção do bem y. Como, em equilíbrio geral, a soma dessas quantidade deve igualar-se à oferta do fator de produção, $h_x + h_y = H$, concluímos que, no equilíbrio geral $h_x = h_y = H/2$.

Sendo $h_x = h_y$, podemos ainda concluir que, no equilíbrio geral $p = |TMT| = (h_x + 1)/(h_y + 1) = 1$. Além disso, substituindo $h_x = h_y = H/2$ nas funções de produção, obtemos, as quantidades de equilíbrio geral dos bens de consumo:

$$x = \ln(\frac{H}{2} + 1) = \ln(H + 2) - \ln 2 \quad \text{e} \quad y = \ln(\frac{H}{2} + 1) = \ln(H + 2) - \ln 2.$$

Resta-nos apenas determinar o preço de equilíbrio do fator de produção. Para isso, lembremo-nos que, no equilíbrio, a empresa iguala, para cada produto, o valor do produto marginal do fator de produção do fator de produção a seu preço w. Assim, por exemplo, para o produto x, devemos ter

$$p f_x'(h_x) = w \Rightarrow w = \frac{2}{H+2}.$$