Equilíbrio Geral

Roberto Guena de Oliveira

16 de junho de 2021

Parte I

Modelo de Troca

Sumário

Estrutura

Hipóteses e notações

- Há apenas dois consumidores: o consumidor A e o consumidor B.
- Há apenas dois bens: o bem 1 e o bem 2.
- As quantidades inicialmente existentes dos bens 1 e 2 na economia, também chamadas dotações iniciais da economia desses bens, serão consideradas fixas e notadas por ω_1 e ω_2, respectivamente.
- As dotações iniciais são totalmente distribuídas entre os dois consumidores. Notaremos por ω_i^J a parte da dotação inicial do bem i ($i = 1, 2$) possuída pelo consumidor J ($J = A, B$). Assim, temos

$$\omega_1 = \omega_1^A + \omega_1^B \quad \text{e} \quad \omega_2 = \omega_2^A + \omega_2^B$$

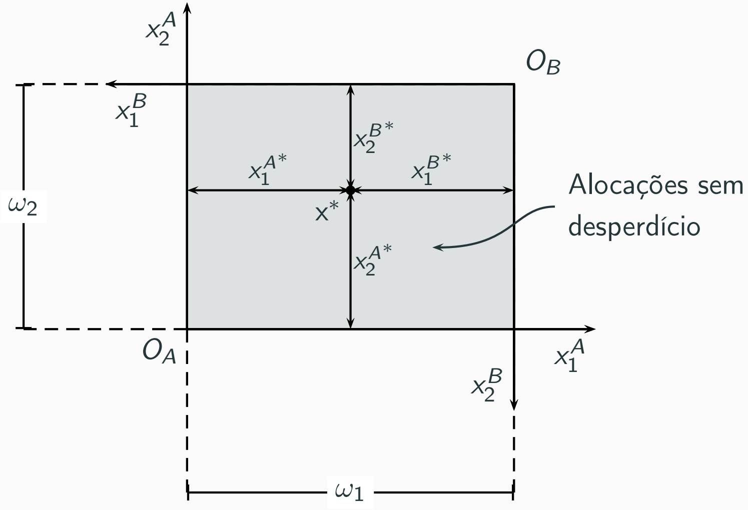
Definições

- Uma alocação econômica do consumo $(x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B)$ é uma especificação do consumo de cada bem por parte de cada consumidor na qual x_i^J $(i = 1, 2$ e $J = A, B)$ representa o consumo do bem i por parte do consumidor J.
- Uma alocação econômica do consumo é dita *factível* no modelo de troca caso tenhamos

$$x_1^A + x_1^B \leq \omega_1 \quad \text{e} \quad x_2^A + x_2^B \leq \omega_2$$

- Uma alocação factível para a qual as condições acima se verificam com igualdade, é chamada alocação sem desperdício.

A caixa de Edgeworth



Eficiência

Sumário

Definição
Diz-se que uma alocação de consumo factível $(x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B)$ é Pareto superior a outra alocação de consumo factível $(y_1^A, y_2^A, y_1^B, y_2^B)$ caso (notando por $\succsim_A$ e $\succsim_B$ as relações de preferência dos consumidores A e B, respectivamente) tenhamos

$$(x_1^A, x_2^A) \succsim_A (y_1^A, y_2^A) \quad \text{e} \quad (x_1^B, x_2^B) \succsim_B (y_1^B, y_2^B)$$

com

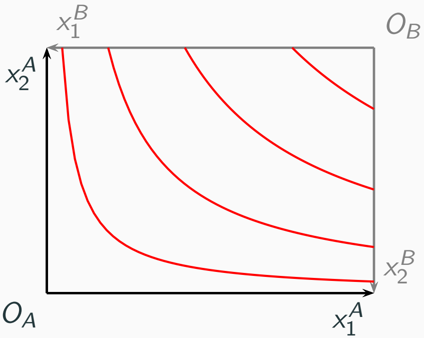
$$(x_1^A, x_2^A) \succ_A (y_1^A, y_2^A) \quad \text{e/ ou} \quad (x_1^B, x_2^B) \succ_B (y_1^B, y_2^B)$$

Eficiência de Pareto

Definição
Uma alocação de consumo factível é dita Pareto eficiente caso não haja qualquer outra alocação de consumo factível que lhe seja Pareto superior.

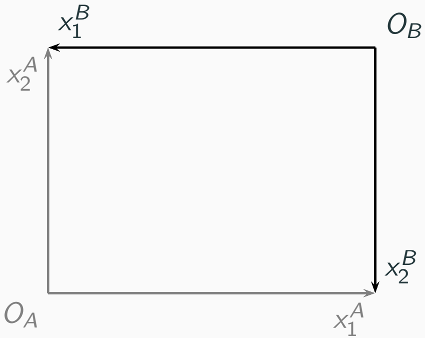
Definição
O conjunto de todas as alocações eficientes de uma economia é chamado conjunto de Pareto ou curva de contrato.

Consumidor A

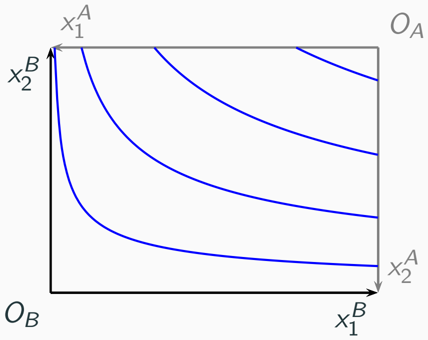


Preferências na caixa de Edgeworth

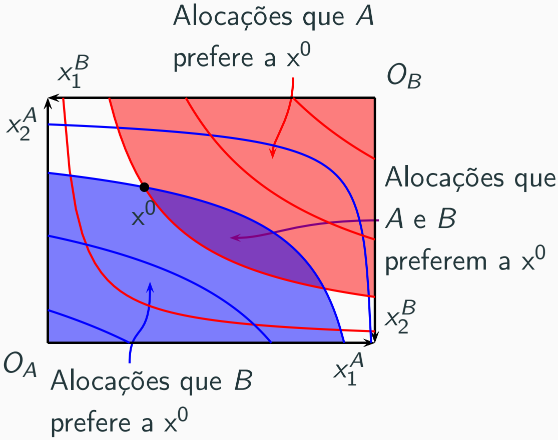
Consumidor B



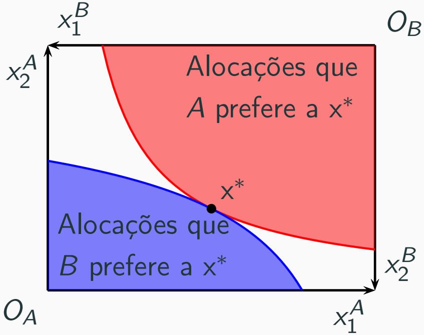
Consumidor B



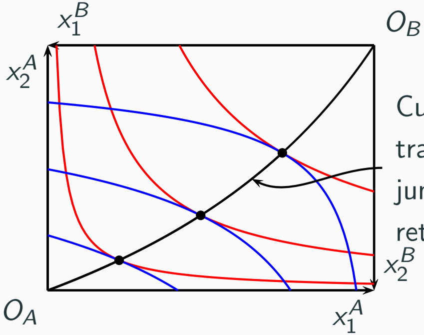
Uma alocação ineficiente



Uma alocação eficiente



O conjunto de Pareto



Curva de contrato ou conjunto de Pareto

Conc. perf.

Sumário

Demanda bruta

As demandas brutas pelos bens 1 e 2 por parte dos consumidores A e B são, respectivamente

$$\begin{array}{ccc} x_1^A(p_1, p_2, p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A) & , & x_2^A(p_1, p_2, p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A) \\ x_1^B(p_1, p_2, p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B) & \text{e} & x_2^B(p_1, p_2, p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B) \end{array}$$

Demandas líquidas

As demandas líquidas ou os excessos de demanda pelos bens 1 e 2 por parte dos consumidores A e B são, respectivamente

$$
\begin{aligned}
e_1^A(p_1, p_2, \omega_1^A, \omega_2^A) &= x_1^A(p_1, p_2, p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A) - \omega_1^A \\
e_2^A(p_1, p_2, \omega_1^A, \omega_2^A) &= x_2^A(p_1, p_2, p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A) - \omega_2^A \\
e_1^B(p_1, p_2, \omega_1^B, \omega_2^B) &= x_1^B(p_1, p_2, p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B) - \omega_1^B \\
e_2^B(p_1, p_2, \omega_1^B, \omega_2^B) &= x_2^B(p_1, p_2, p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B) - \omega_2^B
\end{aligned}
$$

Observação
Para simplificar a notação, omitiremos as dotações iniciais dos argumentos das funções de demanda e de excesso de demanda, visto que suporemos que essas dotações permanecerão inalteradas.

Excessos de demanda agregados

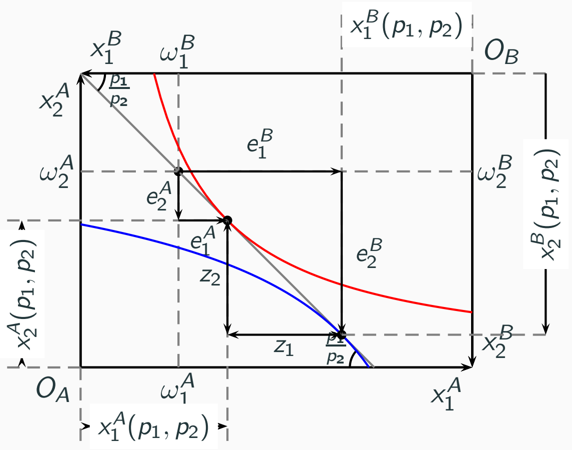
Os excessos de demanda agregados pelos bens 1 e 2 são dados pelas funções

$$\begin{aligned} z_1(p_1, p_2) &= e_1^A(p_1, p_2) + e_1^B(p_1, p_2) \\ &= x_1^A(p_1, p_2) + x_1^B(p_1, p_2) - \omega_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_2(p_1, p_2) &= e_2^A(p_1, p_2) + e_2^B(p_1, p_2) \\ &= x_2^A(p_1, p_2) + x_2^B(p_1, p_2) - \omega_2 \end{aligned}$$

Demandas na caixa de Edgeworth



Enunciado
Caso os consumidores demandem cestas de bens sobre suas linhas de restrição orçamentária, então, para quaisquer $p_1 > 0$ e $p_2 > 0$, teremos

$$p_1 z_1(p_1, p_2) + p_2 z_2(p_1, p_2) = 0$$

Lei de Walras

Prova
Da hipótese de monotonicidade das preferências sabemos que

$$p_1 x_1^A(p_1, p_2) + p_2 x_2^A(p_1, p_2) = p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A \quad \text{e}$$
$$p_1 x_1^B(p_1, p_2) + p_2 x_2^B(p_1, p_2) = p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B$$

O que equivale a

$$p_1 e_1^A(p_1, p_2) + p_2 e_2^A(p_1, p_2) = 0 \quad \text{e}$$
$$p_1 e_1^B(p_1, p_2) + p_2 e_2^B(p_1, p_2) = 0$$

Somando as duas igualdades, obtemos

$$\begin{aligned} p_1(e_1^A(p_1, p_2) + e_1^B(p_1, p_2)) & \\ + p_2(e_2^A(p_1, p_2) + e_2^B(p_1, p_2)) = 0 & \\ \Rightarrow p_1 z_1(p_1, p_2) + p_2 z_2(p_1, p_2) = 0 & \end{aligned}$$

Equilíbrio

Definição

Diz-se que uma economia de trocas encontra-se em equilíbrio geral quando, para cada bem dessa economia, a demanda bruta total é igual à dotação inicial. Ou, equivalentemente, no caso de uma economia com 2 consumidores e 2 bens,

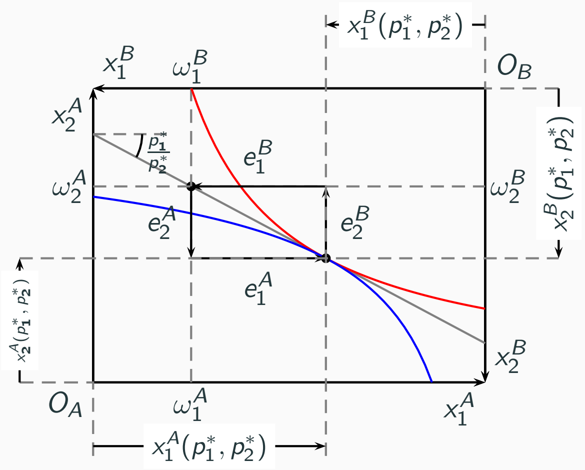
$$\text{condição 1:} \begin{cases} x_1^A(p_1, p_2) + x_1^B(p_1, p_2) = \omega_1^A + \omega_1^B \\ x_2^A(p_1, p_2) + x_2^B(p_1, p_2) = \omega_2^A + \omega_2^B \end{cases}$$

$$\text{condição 2:} \begin{cases} e_1^A(p_1, p_2) + e_1^B(p_1, p_2) = 0 \\ e_2^A(p_1, p_2) + e_2^B(p_1, p_2) = 0 \end{cases}$$

$$\text{condição 3:} \begin{cases} z_1(p_1, p_2) = 0 \\ z_2(p_1, p_2) = 0 \end{cases}$$

Os preços p_1 e p_2 que garantem as condições acima são chamados preços de equilíbrio.

Equilíbrio na caixa de Edgeworth



Observação

- Como as funções de demanda são homogêneas de grau zero em relação aos preços temos que, caso as condições de equilíbrio sejam obtidas aos preços p_1^* e p_2^*, elas também serão obtidas aos preços αp_1^* e αp_2^* para qualquer $\alpha > 0$.
- Em particular, pode ser interessante tomar $\alpha = \frac{1}{p_2^*}$, de modo a expressar os preços em termos do preço relativo do bem 1 em relação ao bem 2.
- Da lei de Walras segue que o sistema de equações formados pelas condições de equilíbrio possue um grau de indeterminação, pois uma das equações é uma combinação linear das outras. Desse modo, se $n-1$ mercados estão em equilíbrio, o $n-$ésimo mercado também estará.

Exemplo:

Considere um modelo de equilíbrio geral de trocas puras com dois indivíduos: A e B, e dois bens: x e y. São dotações iniciais de A: $x = 10$ e $y = 2,5$; e dotações iniciais de B: $x = 10$ e $y = 20$. As funções utilidade de A e B são: $U_A(x, y) = 2x^{0,2}y^{0,3}$ e $U_B(x, y) = 3x^{0,5}y^{4,5}$, respectivamente. Se fixarmos o preço do bem x em 1 unidade monetária, qual será o preço do bem y no equilíbrio competitivo?

Solução:

As funções de demanda pelo bem x são[1]

$$x_A(1,p) = \frac{2}{5}(10 + 2.5p) \quad \text{e} \quad x_B(1,p) = \frac{1}{10}(10 + 20p)$$

A condição de equilíbrio no mercado do bem x é.

$$x_A(1,p) + x_B(1,p) = 20$$
$$\Rightarrow \frac{2}{5}(10 + 2.5p) + \frac{1}{10}(10 + 20p) = 20$$

Resolvendo para p obtemos

$$p = 5$$

[1] Lembre-se da fórmula para a função de demanda para uma utilidade Cobb-Douglas

Solução (b):

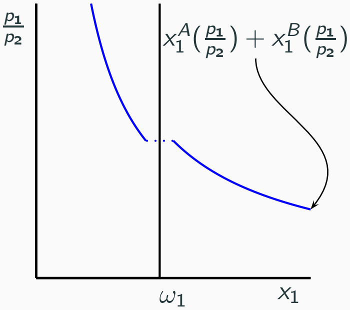
Pela identidade de Walras, sabemos que, se o mercado do bem x está em equilíbrio quando o preço relativo do bem y é 2, o mercado do bem y também deve estar em equilíbrio. Apenas para checar, verifiquemos a condição de equilíbrio nesse mercado:

$$\underbrace{\frac{3}{5}\frac{10+2,5p}{p}}_{y_A(1,p)} + \underbrace{\frac{9}{10}\frac{10+20p}{p}}_{y_B(1,p)} = 22,5$$

Resolvendo essa equação para p, obtemos

$$p = 5$$

Um caso de ausência de equilíbrio



Hipóteses que garantem continuidade da demanda

- As preferências são convexas
- Os consumidores são infinitamente pequenos e diferenciados.

Os teoremas do bem-estar social

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social
Todo o equilíbrio geral competitivo é eficiente no sentido de Pareto.

Segundo Teorema do Bem-Estar Social
Desde que as preferências sejam convexas, toda alocação eficiente é uma alocação de equilíbrio para uma redistribuição adequada das dotações iniciais.

Monopólio

Sumário

Monopólio comum

Regras do jogo
Suponha que a dotação de consumo da economia seja definida através do seguinte jogo

1. O consumidor A propõem um preço relativo $p = {}^{p_1}/_{p_2}$.
2. O consumidor B define suas demandas respeitando sua dotação inicial e o preço relativo anunciado.
3. O consumidor A realiza trocas de modo a satisfazer as demandas definidas por B.

A reação de B
A função de reação de B é simplesmente o par de suas funções de demanda $(x_1^B(p), x_2^B(p)$

Monopólio comum

A deve escolher p de modo a maximizar

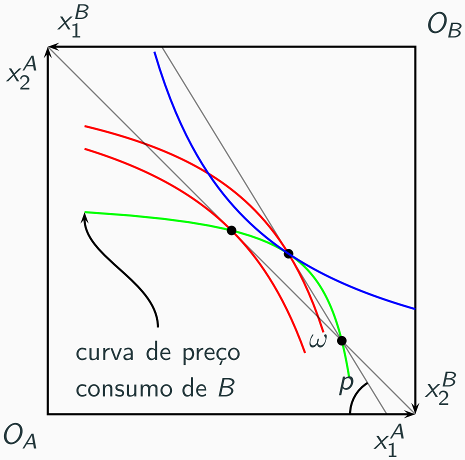
$$U^A(x_1^A, x_2^A)$$

sabendo que

$$x_1^A = \omega_1 + x_1^B(p) \quad \text{e} \quad x_2^A = \omega_2 - x_2^B(p)$$

Substituindo essa restrição na função objetivo e igualando a primeira derivada a zero, encontramos a seguinte condição de ótimo:

$$|TMS_A| \quad \boxed{\frac{UMg_1^A}{UMg_2^A}} = -\boxed{\frac{\frac{d\,x_2^B(p)}{d\,p}}{\frac{d\,x_1^B(p)}{d\,p}}} \quad \text{inclinação da curva de preço consumo}$$


x_1^B
O_B
x_2^A
ω
curva de preço
consumo de B
p
x_2^B
O_A
x_1^A

Monopolista comum: Exemplo

- $\omega_1^A = 8$, $\omega_2^A = 2$, $\omega_1^B = 2$,$\omega_2^B = 8$
- $U^A(x_1^A, x_2^A) = x_1^A x_2^A$, $U^B(x_1^B, x_2^B) = x_1^B x_2^B$

Qual o preço de monopólio?

Resposta:

$$\frac{p_1}{p_2} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Discriminação perfeita na caixa de Edgeworth

Suponha agora que as regras para a definição da alocação de consumo sejam

1. O consumidor A propõem uma alocação factível.
2. O consumidor B aceita ou rejeita essa alocação.
3. Se B rejeita a alocação proposta por A, a alocação final de consumo será igual à distribuição das dotações iniciais.
4. Se B aceita, a alocação final de consumo será a alocação proposta por A.

Discriminação perfeita

Seja $(x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B)$ a alocação proposta pelo consumidor A.

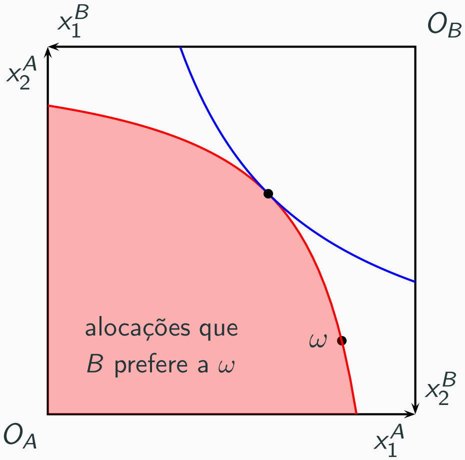
Melhor resposta do consumidor B
Aceitar a nova alocação caso $U^B(x_1^B, x_2^B) \geq U^B(\omega_1^B, \omega_2^B)$ e, caso contrário, recusar.

Problema do consumidor A
Escolher $(x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B)$ de modo a maximizar $U^A(x_1^A, x_2^A)$, respeitando as restrições:

$$U^B(x_1^B, x_2^B) \geq U^B(\omega_1^B, \omega_2^B),$$

$$x_1^A + x_1^B = \omega_1 \quad \text{e} \quad x_2^A + x_2^B = \omega_2$$

Discriminação perfeita



Discriminação perfeita: Exemplo

- $\omega_1^A = 8$, $\omega_2^A = 2$, $\omega_1^B = 2$,$\omega_2^B = 8$
- $U^A(x_1^A, x_2^A) = x_1^A x_2^A$, $U^B(x_1^B, x_2^B) = x_1^B x_2^B$

Qual a alocação de equilíbrio quando A é discriminador perfeito?

Resposta:

$$x_1^A = 6, x_2^A = 6, x_1^B = 4, x_2^B = 4$$

Parte II

Modelo com produção

Sumário

Um consumidor um produto

Um consumidor dois produtos

Um consumidor, dois produtos, dois fatores

Dois consumidores, dois produtos

Um consumidor um produto

Primeiro modelo

- Um consumidor
- Dois bens: lazer e coco.
- Função de produção de cocos: $c = f(h)$, h é o número de horas trabalhadas.
- Função de produção de lazer: $\ell = H - h$, H é o número de horas disponíveis.
- Função de utilidade: $U(c, \ell)$

Escolha ótima

O problema
Escolher ℓ e c de modo a maximizar

$$U(\ell, c)$$

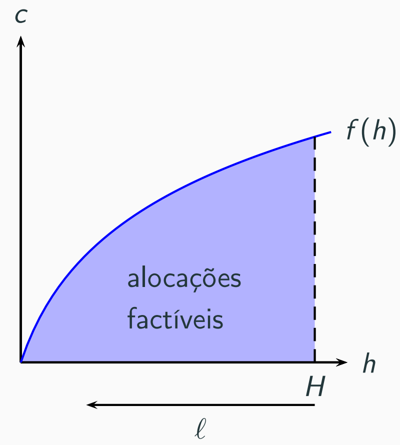
dadas as restrições

$$\ell + h = H \qquad \text{e} \qquad c \leq f(h)$$

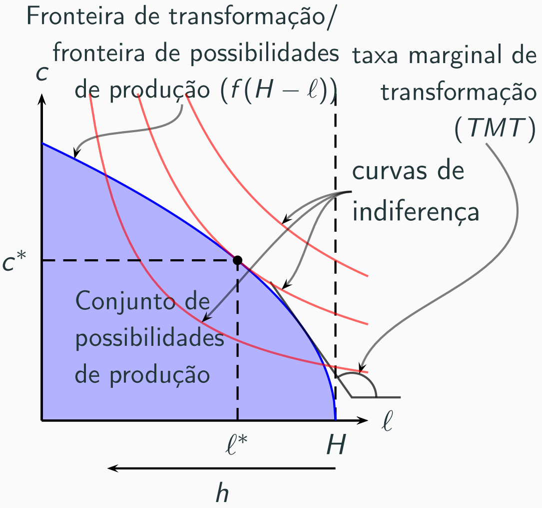
Condição de 1ª ordem

$$\frac{\frac{\partial U(c,\ell)}{\partial \ell}}{\frac{\partial U(c,\ell)}{\partial c}} = f'(h) \Rightarrow |TMS| = PMg(h)$$

Solução gráfica – I



Solução gráfica – II



Mercado

- Um consumidor tomador de preços.
- Uma firma maximizadora de lucros e tomadora de preços que compra trabalho do consumidor e repassa seu lucro ao seu único proprietário, o consumidor.
- w é o preço do trabalho em cocos

Comportamento da firma

A firma deve escolher um nível de produção/ contratação de trabalho (h) que maximize o seu lucro:

$$\pi = f(h) - wh$$

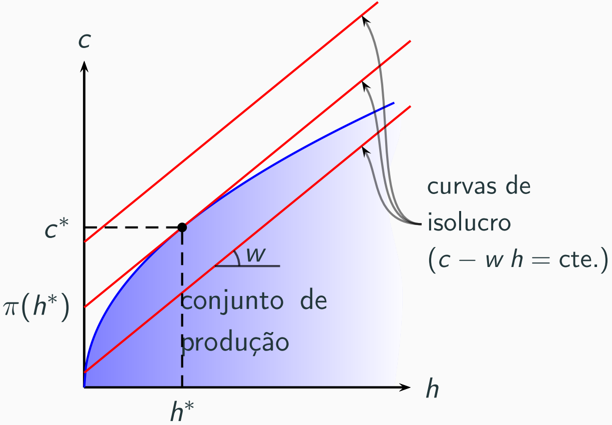
A condição um ponto de lucro máximo com $h > 0$ será caracterizado por

Condição de 1ª ordem: $f'(h) = w$ ou seja $PMg(h) = w$.

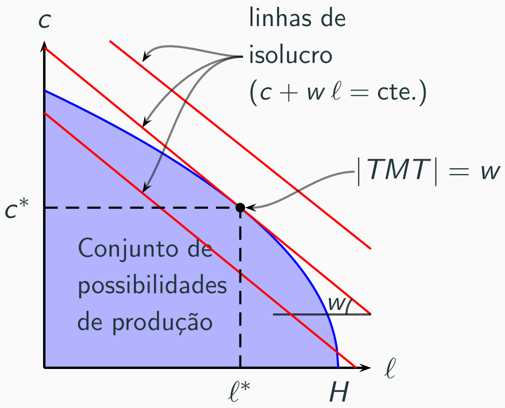
Condição de 2ª ordem: $f''(h) < 0$, ou seja o produto marginal é decrescente.

lucro da firma: $\pi = f(h^*) - wh^*$, sendo h^* o valor de h^* que satisfaz as condições acima.

Equilíbrio da firma



Equilíbrio da firma



Demanda do consumidor

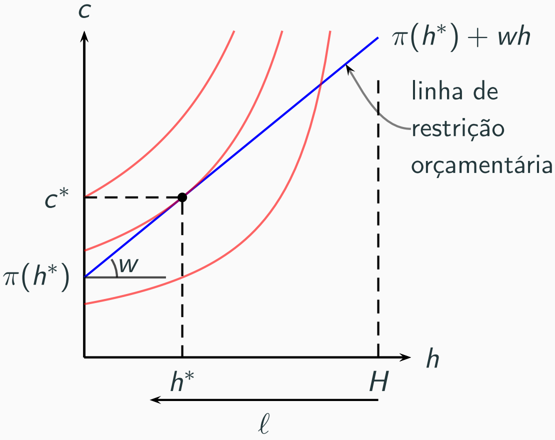
O problema do consumidor é maximizar $U(c, \ell)$ Dadas as restrições

$$c = w\,h + \pi(h^*) \quad \text{e} \quad \ell = H - h$$

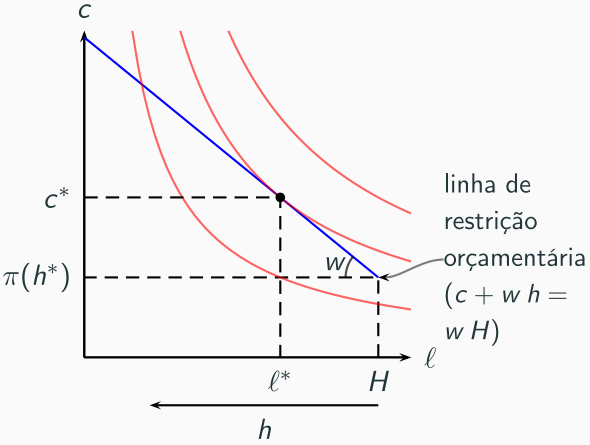
Caso as preferências sejam monotônicas e a solução implique $h, \ell > 0$, então, ela deve satisfazer

$$\frac{\frac{\partial U(c,\ell)}{\partial \ell}}{\frac{\partial U(c,\ell)}{\partial c}} = w$$

Equilíbrio do consumidor



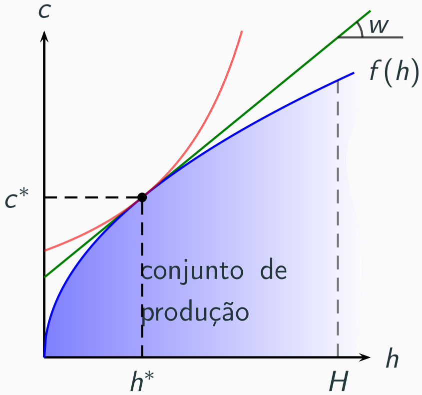
Equilíbrio do consumidor



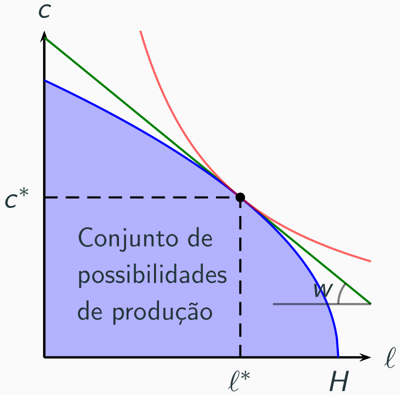
Equilíbrio

$$\begin{cases} w\,h + \pi(h^*) = f(h^*) & \text{(equil. merc. produto)} \\ \dfrac{\partial U(c,\ell)/\partial \ell}{\partial U(c,\ell)/\partial c} = w = f'(h) & \text{(equil. merc. trabalho)} \end{cases}$$

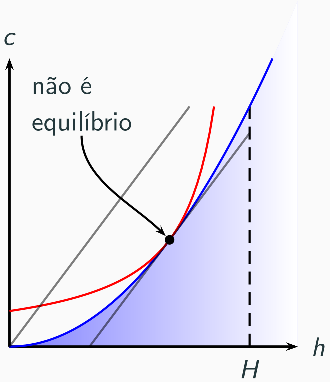
Equilíbrio

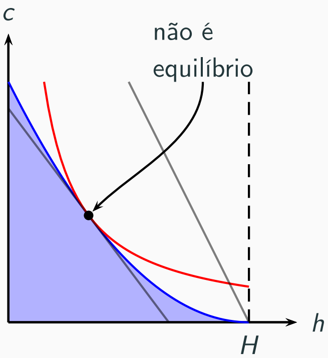


Equilíbrio



Não convexidades e ausência de equilíbrio



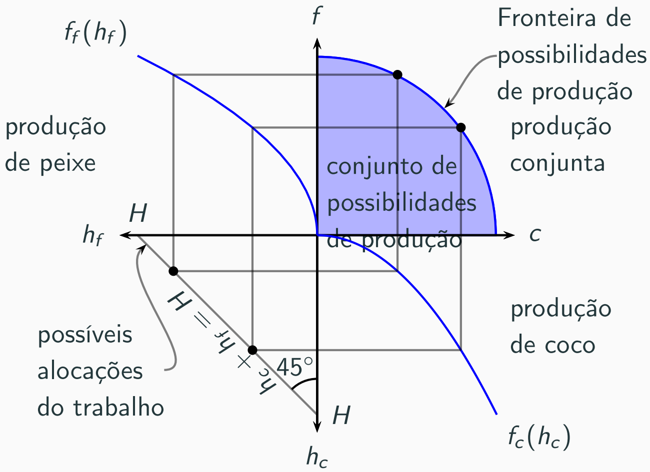


Um consumidor dois produtos

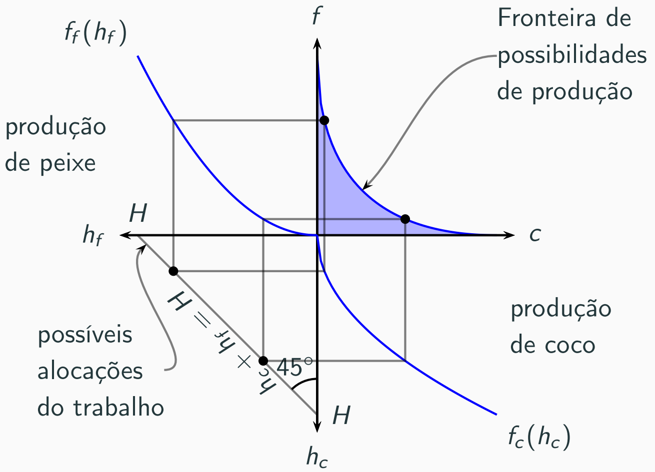
Segundo modelo

- Um consumidor, Robinson Crusoé.
- Dois bens: peixes (f) e coco (c). (O lazer é um neutro)
- h_f e h_c são horas dedicadas à produção de peixe e coco, respectivamente. $h_f + h_c = H$.
- $f_f(h_f)$ e $f_c(h_c)$ são as funções de produção de peixe e coco, respectivamente.
- Função de utilidade $U(c, f)$

Construção da fronteira de possibilidades de produção (FPP)



Economias de escala e a FPP



Produtividades marginais e a taxa marginal de transformação (TMT)

Em qualquer ponto sobre a fronteira de possibilidades de produção temos

$$\begin{cases} f = f_f(h_f) \\ c = f_c(h_c) \\ h_f + h_c = H \end{cases}$$

Diferenciando em relação a c obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{d\,f}{d\,c} = f_f'(h_f)\dfrac{d\,h_f}{d\,c} \\ 1 = f_c'(h_c)\dfrac{d\,h_c}{d\,c} \\ \dfrac{d\,h_f}{d\,c} + \dfrac{d\,h_f}{d\,c} = 0 \end{cases}$$

Combinando as três equações, obtemos

$$TMT = \frac{df}{dc} = -\frac{f_f'(h_f)}{f_c'(h_c)}$$

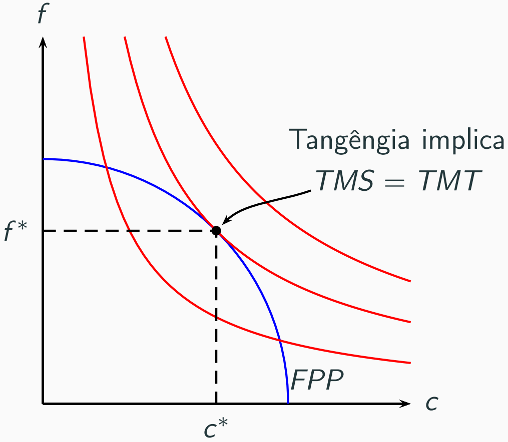
Eficiência

O problema
Escolher h_f e h_c de modo a maximizar $U(c, f)$ tendo como restrições $c \leq f_c(h_c)$, $f \leq f_f(h_f)$ e $h_c + h_f \leq H$

Condições de primeira ordem

$$|TMS| \longrightarrow \boxed{\frac{\partial U(c,f)/\partial c}{\partial U(c,f)/\partial c}} = \boxed{\frac{f_c'(h_c)}{f_f'(h_f)}} \longleftarrow |TMT|$$

$$h_c + h_f = H$$



f
f*
Tangêngia implica
TMS = TMT
FPP
c
c*

Comportamento da empresa

A função de lucro

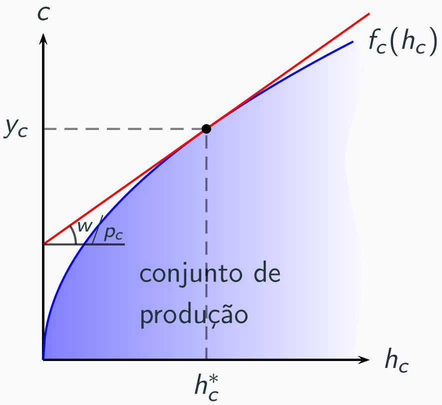
$$\pi = p_c\, f_c(h_c) + p_f\, f_f(h_f) - w(h_c + h_f)$$

Condição de 1ª ordem de lucro máximo

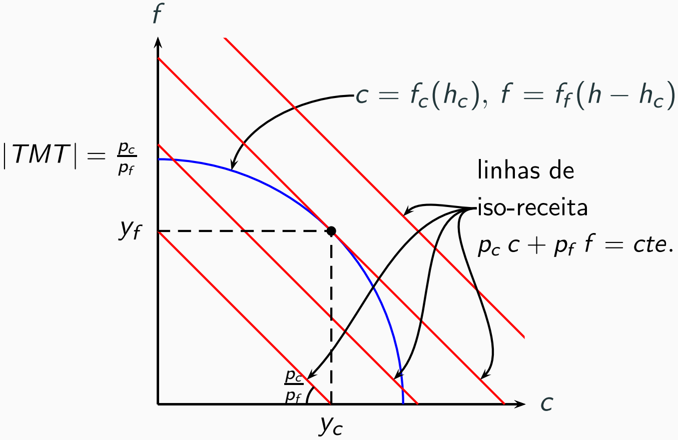
$$p_c\, f_c'(h_c) = w = p_f\, f_f'(h_f) \Rightarrow \frac{p_c}{p_f} = -\frac{f_f'(h_f)}{f_c'(h_c)}\,(= |TMT|)$$

Notação
Empregaremos $y_c(p_c, p_f, w)$ e $y_f(p_c, p_f, w)$ para designar as funções de oferta de coco e peixe, respectivamente.

Interpretação gráfica



Interpretação gráfica



Problema do consumidor
Maximizar $U(c, f)$ dada a restrição $p_c\, c + p_f\, f \leq \pi + w\, H$.

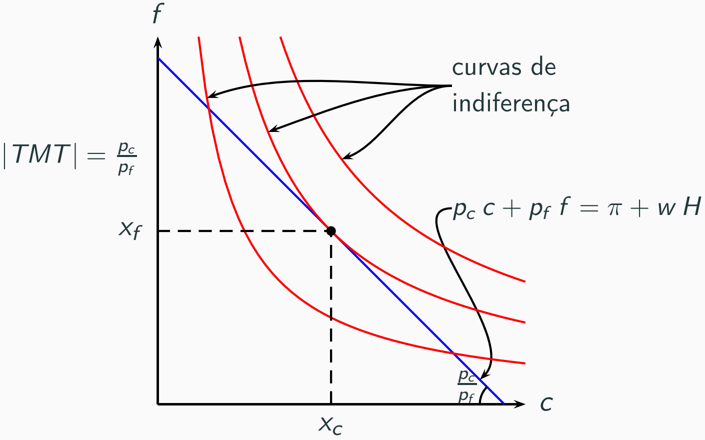
Observação: Note que, como $\pi = p_c\, y_c + p_f\, y_f - wH$, a restrição acima pode ser reescrita como $p_c\, c + p_f\, f \leq p_c\, y_c + p_f\, y_f$

Condição de máximo de 1ª ordem

$$(|TMS| =)\frac{\partial U(c,f)/\partial c}{\partial U(c,f)/\partial f} = \frac{p_c}{p_f}$$

Notação
Empregaremos $x_c(p_c, p_f, w\, H + \pi)$ e $x_f(p_c, p_f, w\, H + \pi)$ para designar as funções de demanda de coco e peixe, respectivamente.

Interpretação gráfica



Equilíbrio

Mercado de trabalho

$$p_c\, f_c'(h_c) = w = p_f\, f_f'(h_f)$$

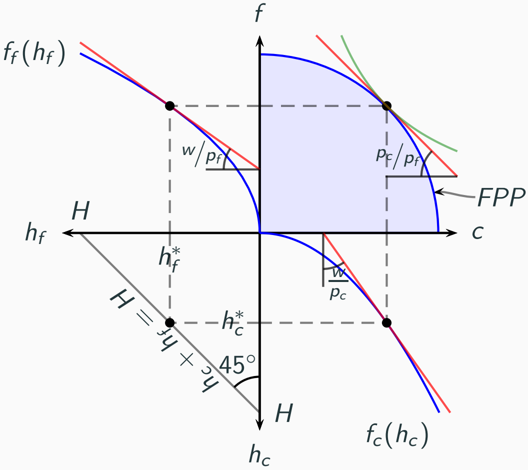
$$h_c + h_f = H$$

Mercado de bens

$$x_c(p_c, p_f, w\,H + \pi) = f_c(h_c)$$

$$x_f(p_c, p_f, w\,H + \pi) = f_f(h_f)$$

Equilíbrio Representação Gráfica



Dois fatores

Um modelo com dois fatores de produção

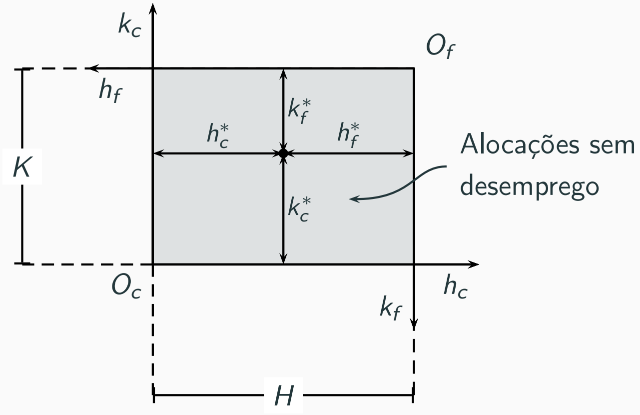
- Um consumidor, Robinson Crusoé.
- Dois bens: peixe (f) e coco (c).
- Dois fatores de produção: trabalho (h) e capital (k) disponíveis em quantidades H e K, respectivamente.
- Funções de produção: coco: $f_c(h_c, k_c)$; peixe: $f_f(h_f, k_f)$, $h_c + h_f \leq H$ e $k_c + k_f \leq K$
- Função de utilidade $U(c, f)$

Definição
Uma alocação dos fatores de produção (h_c, k_c, h_f, k_f) é uma descrição das quantidades de cada fator de produção empregadas em cada processo de produção.

Alocações factíveis dos fatores de produção
Uma alocação (h_c, k_c, h_f, k_f) dos fatores de produção é factível caso $h_c + h_f \leq H$ e $k_c + k_f \leq K$.

Alocações factíveis e sem desemprego
Uma alocação factível dos fatores de produção (h_c, k_c, h_f, k_f) é dita sem desemprego caso $h_c + h_f = H$ e $k_c + k_f = K$.

A caixa de Edgeworth na produção

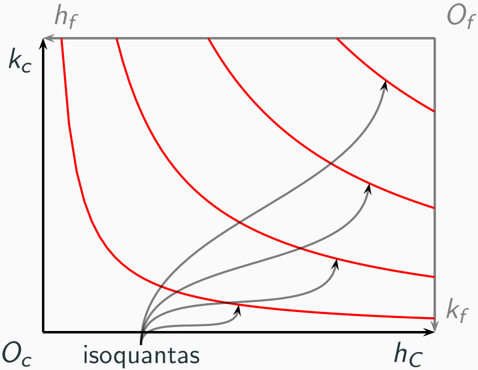


Definição
Uma alocação de fatores sem desemprego é dita tecnicamente eficiente caso não haja alocação alternativa alguma que propicie uma produção maior de um dos bens sem com isso reduzir a produção de, pelo menos, um outro bem.

Definição
A curva de contrato na produção é o conjunto de todas as alocações de fatores tecnicamente eficientes.

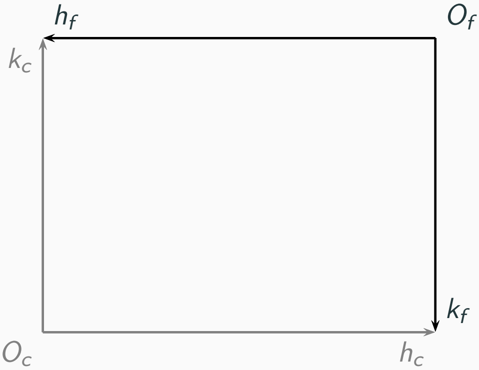
Produção na caixa de Edgeworth

Coco



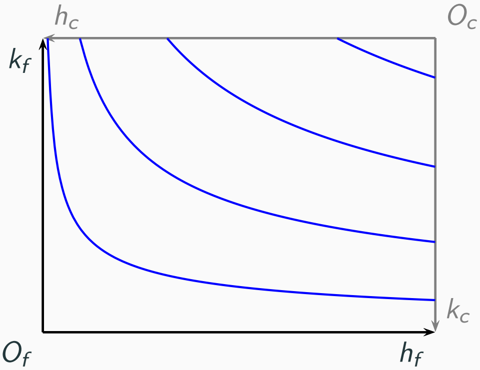
Produção na caixa de Edgeworth

Peixe

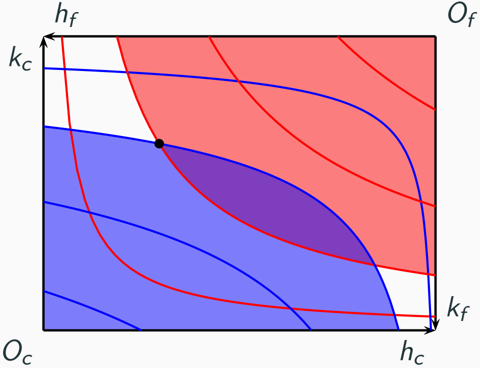


Produção na caixa de Edgeworth

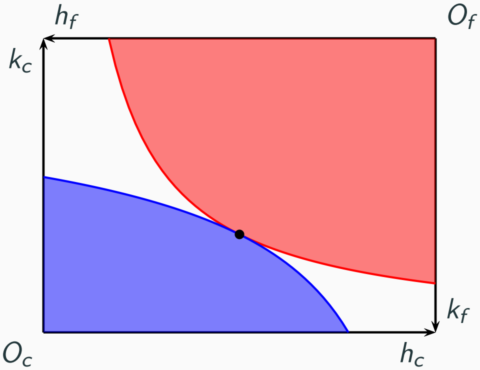
Peixe



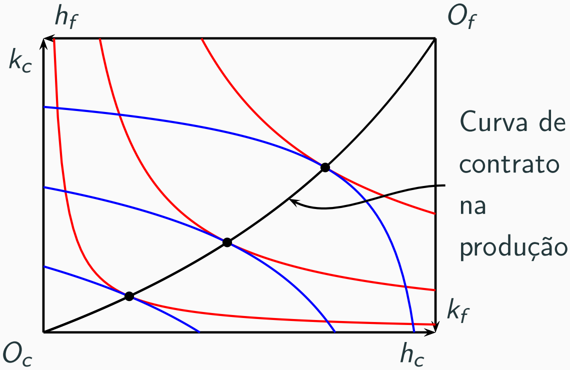
Uma alocação tecnicamente ineficiente



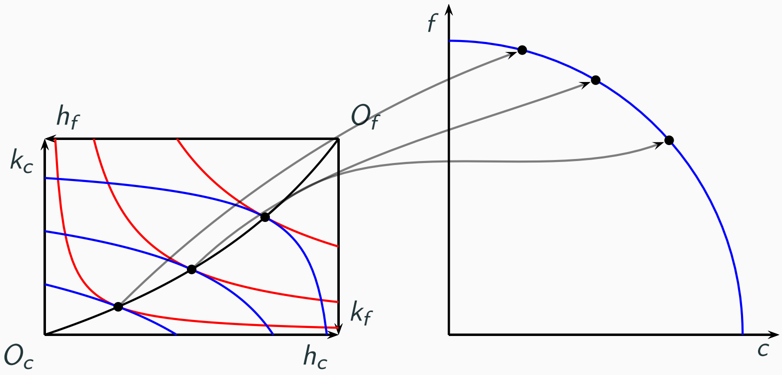
Uma alocação tecnicamente eficiente



Curva de contrato na produção



A fronteira de possibilidades de produção



Funções de produção e a *TMT*

Condição prod. eficiente

$$\max_{h_f, k_f} f_f(h_f, k_f)$$

$$\text{t. q. } h_f + h_c = H; \; k_f + k_c = K; \; f_c(h_c, k_c) \leq c$$

Condições de ótimo

$$\mathscr{L} = f_f(h_f, k_f) - \lambda(c - f_c(H - h_f, K - k_f))$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{h_f} = \frac{\partial \mathscr{L}}{k_f} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\lambda} = 0$$

Funções de produção e a *TMT*

$$\lambda = \frac{df^*}{dc} = TMT$$

$$\frac{\partial f_f}{\partial h_f} = \lambda \frac{\partial f_c}{\partial h_c} \Rightarrow \lambda = \frac{\partial f_f / \partial h_f}{\partial f_c / \partial h_c}$$

$$\frac{\partial f_f}{\partial k_f} = \lambda \frac{\partial f_c}{\partial k_c} \Rightarrow \lambda = \frac{\partial f_f / \partial k_f}{\partial f_c / \partial k_c}$$

O problema da eficiência

O problema
Maximizar $U(c, f)$ dadas as restrições $c \leq f_c(h_c, k_c)$,
$f \leq f_f(h_f, k_f)$, $k_c + k_f \leq K$ e $h_c + h_f \leq H$

Condições de 1ª ordem

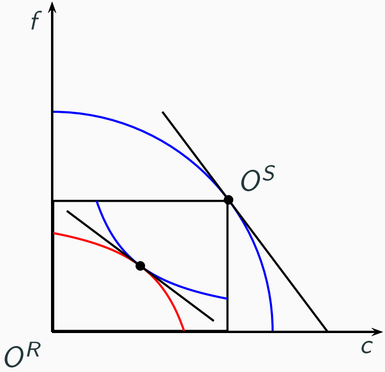
$$\frac{\partial U(c,f)/\partial c}{\partial U(c,f)/\partial f} = \frac{\partial f_f(h_f,k_f)/\partial k_f}{\partial f_c(h_c,k_c)/\partial k_c} = \frac{\partial f_f(h_f,k_f)/\partial h_f}{\partial f_c(h_c,k_c)/\partial h_c} \Rightarrow TMS = TMT$$

$$k_c + k_f = K \quad \text{e} \quad h_c + h_f = H$$

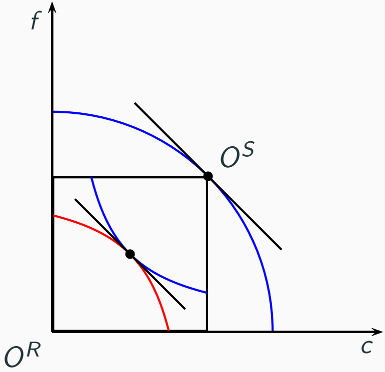
Note que essa solução também implica

$$\frac{\partial f_f(h_f,k_f)/\partial h_f}{\partial f_f(h_f,k_f)/\partial k_f} = \frac{\partial f_c(h_c,k_c)/\partial h_c}{\partial f_c(h_c,k_c)/\partial k_c} \Rightarrow TMST_f = TMST_c$$

Exemplo: Alocação ineficiente



Exemplo: Alocação eficiente



Maximização de lucro

O problema da firma
Maximizar $p_c f_c(h_c, k_c) + p_f f_f(h_f, k_f) - r(k_c + k_f) - w(h_c + h_f)$, sendo r o preço do capital e w o proço do trabalho.

Condição de máximo de 1ª ordem

$$\frac{p_c}{p_f} = \frac{\partial f_f(h_f,k_f)/\partial k_f}{\partial f_c(h_c,k_c)/\partial k_c} = \frac{\partial f_f(h_f,k_f)/\partial h_f}{\partial f_c(h_c,k_c)/\partial h_c} = |TMT|$$

Note que essa condição implica

$$\frac{\partial f_f(k_f,h_f)/\partial k_f}{\partial f_f(k_f,h_f)/\partial h_f} = \frac{\partial f_k(k_f,h_f)/\partial k_f}{\partial f_k(k_f,h_f)/\partial h_f} \Rightarrow TMST_f = TMST_c$$

Mercado de fatores

$$k_c + k_f = K \qquad h_c + h_f = H$$

Mercado de bens

Consumidor: $|TMS| = {}^{p_1}\!/_{p_2}$

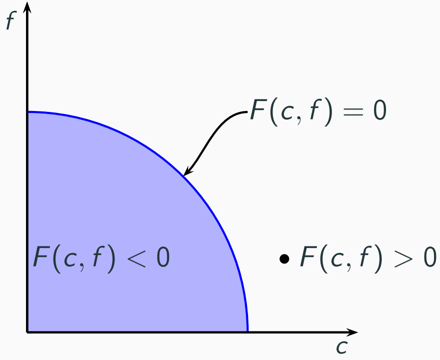
Firma: $|TMT| = {}^{p_1}\!/_{p_2}$

Dois consumidores, dois produtos

Um modelo com dois consumidores e dois produtos

- Dois consumidores: Robinson Crusoé (R) e Sexta-Feira (S).
- Dois bens: peixe (f) e coco (c).
- Funções de utilidade: $U^R(c^R, f^R)$ e $U^S(c^S, f^S)$.
- Função de transformação: $F(c, f)$ tal que
  - (c, f) é factível se, e somente se, $F(c, f) \leq 0$.
  - $F(c, f) = 0 \Leftrightarrow (c, f) \in FPP$.

A função de transformação e a FPP



Eficiência

Uma alocação eficiente (c^R, f^R, c^S, f^S) será eficiente caso $U^R(c^R, f^R)$ seja máxima dadas as restrições

1. $U^S(c^S, f^S) \geq \bar{U}^S$.
2. $F(c^R + c^S, f^R + f^S) \leq 0$.
3. $c^R, c^S, f^R, f^S \geq 0$.

O Lagrangeano desse problema é

$$\mathscr{L} = U^R(c^R, f^R) - \lambda\left(U^S(c^s, f^S) - \bar{U}^S\right) - \mu F(c^R + c^S, f^R + f^S)$$

As condições de 1ª ordem para uma solução com $c^R, c^S, f^R, f^S > 0$ são

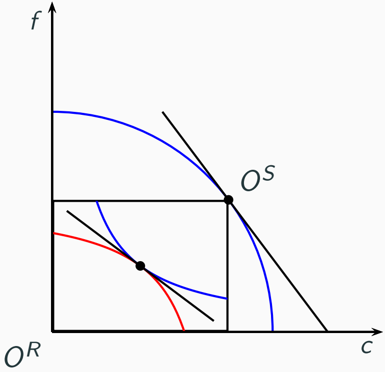
$$\frac{\partial U^R}{\partial c^R} - \mu \frac{F}{\partial c} = 0 \qquad \frac{\partial U^R}{\partial f^R} - \mu \frac{F}{\partial f} = 0$$

$$-\lambda \frac{\partial U^S}{\partial c^S} - \mu \frac{F}{\partial c} = 0 \qquad -\lambda \frac{\partial U^S}{\partial f^S} - \mu \frac{F}{\partial f} = 0$$

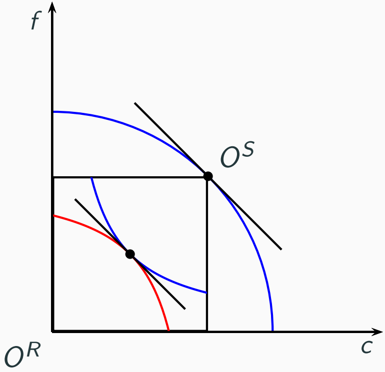
Eliminando λ e μ chegamos a

$$TMS^R = TMS^S = TMT$$

Exemplo: Alocação ineficiente



Exemplo: Alocação eficiente



Equilíbrio de Mercado

Consumidores maximizam utilidade

$$|TMS^R| = \frac{p_c}{p_f} = |TMS^S|$$

Firma maximiza lucro
Ela deve escolher produzir o ponto sobre a FPP para o qual

$$|TMT| = \frac{p_c}{p_f}$$

Observe que as condições de equilíbrio de mercado coincidem com as condições de alocação eficiente.

Exercício

Considere um modelo de equilíbrio geral com 2 indivíduos — Maria e João — 2 fatores de produção — trabalho e capital — e dois bens — coco e peixe. As funções de produção de coco e peixe são, respectivamente, $f_c = 4\sqrt[4]{K_c L_c}$ e $f_f = 4\sqrt[4]{K_f L_f}$, nas quais K_c e L_c são as quantidade de capital e trabalho, respectivamente, empregadas na produção de coco e K_f e L_f são, respectivamente, as quantidades de capital e de trabalho empregadas na produção de peixe. Maria tem uma dotação inicial de 5 unidades de trabalho e 5 unidades de capital e João tem uma dotação inicial de 5 unidades de capital e 5 unidades de trabalho. Encontre uma expressão que descreva a curva de contrato na produção e uma expressão que descreva a fronteira de possibilidades de produção supondo que os dois fatores de produção serão plenamente empregados no processo produtivo.

Exercício

Considerando os dados do exercício anterior, suponha que as preferências de Maria sejam representadas pela função de utilidade $U_M = c_M f_M^4$ na qual c_M e f_M representam as quantidades que ela consome de coco e peixe, respectivamente e que as preferências de João sejam representadas pela função de utilidade $U_J(c_J, f_J) = c_J f_J^4$ na qual c_J e f_J representam as quantidades que ele consome de, respectivamente, coco e peixe. Encontre os preços e a alocação de consumo de equilíbrio dessa economia.

Exercício

Considere uma economia com um único produto, mil consumidores idênticos com função de utilidade $u(c, \ell) = c\ell$ na qual c é a quantidade consumida do único bem de consumo dessa economia e ℓ é o tempo de lazer diário do consumidor. O bem de consumo é produzido por quinhentas firmas idênticas com função de produção $f(h) = \sqrt{h}$ na qual h é o número de horas de trabalho que ela contrata dos consumidores. Estes podem alocar suas 24 horas diárias entre lazer e trabalho. As ações das empresas dessa economia são divididas igualmente entre todos os consumidores. Determine o salário real de equilíbrio dessa economia.