

Escolha envolvendo risco

Roberto Guena de Oliveira

18 de novembro de 2025

USP

Mercados contingentes

Estrutura da aula

Mercados contingentes

Utilidade esperada

Estrutura da aula

Mercados contingentes

Utilidade esperada

Posturas diante do risco

- Definições

- Representações gráficas

- Prêmio do risco

- Medida de aversão ao risco

Estrutura da aula

Mercados contingentes

Utilidade esperada

Posturas diante do risco

- Definições

- Representações gráficas

- Prêmio do risco

- Medida de aversão ao risco

Comportamento de agentes com aversão ao risco

Colocação do problema

Muitos problemas econômicos relevantes, tais como escolha de carreira, decisões de investimento, etc., relacionam-se a escolhas cujos resultados dependem de variáveis futuras com valores não previamente conhecidos. Nesses casos, dizemos que a escolha é feita sob risco.

De que maneira os agentes lidam com esses problemas?

O mercado é um mecanismo eficiente para lidar com situações de risco?

Mercados contingentes

Definição

Um **estado da natureza** ou **estado do mundo** ou, simplesmente, **resultado** é uma especificação completa dos valores de todas as variáveis relevantes em uma determinada data.

Exemplo

Suponha um mundo em que tudo dependa de dois lançamentos seguidos de uma moeda. Notemos por C a ocorrência de cara e por R a ocorrência de coroa. Os estados de natureza são:

$$(C, C), (C, R), (R, C), (R, R)$$

Definição

Um **evento** é um conjunto de estados de natureza. Dizemos que um evento ocorre quando ocorre um de seus elementos.

Exemplo

Em um mundo no qual tudo depende de dois lançamentos seguidos de moedas, são, entre outros, eventos: “o primeiro lançamento dar cara” — $\{(C, R), (C, C)\}$ — e “o primeiro lançamento resulta diferente do segundo lançamento” — $\{(C, R), (R, C)\}$.

Mercadoria

Em mercados contingentes, uma mercadoria é um bem a ser entregue desde que ocorra um determinado evento.

Exemplo

Em um mundo no qual tudo depende de dois lançamentos seguidos de moedas, e só existe dinheiro, são, entre outras, mercadorias: “R\$ 1,00 caso o primeiro lançamento der cara”, “R\$ 1,00 caso os dois lançamentos dêem cara” e “R\$ 1,00 independentemente dos resultados dos dois lançamentos.”

Mercados contingentes

São mercados em que há negociação de mercadorias definidas em função de diferentes eventos.

Um plano de consumo contingente é uma descrição completa das quantidades consumidas de cada bem em cada possível estado de natureza.

Mercados contingentes: exemplo

Considere um mundo no qual há apenas dois estados de natureza:

Estado b Parte do patrimônio de um consumidor é detruída.

Estado g O patrimônio do consumidor é mantido intacto.

- As preferências desse consumidor dependem apenas do valor de seu patrimônio em cada um desses estados.
- Há um mercado de seguros que oferece um seguro contra o estado b cobrando, nos dois estados de natureza, γ reais por R\$1,00 segurado.

Exemplo – restrição orçamentária

Sejam

w_b^0 o patrimônio no estado b quando não é feito o seguro.

w_g^0 o patrimônio no estado g quando não é feito o seguro.

w_b o patrimônio no estado b

w_g o patrimônio no estado g

K o valor segurado

Exemplo – restrição orçamentária

Sejam

w_b^0 o patrimônio no estado b quando não é feito o seguro.

w_g^0 o patrimônio no estado g quando não é feito o seguro.

w_b o patrimônio no estado b

w_g o patrimônio no estado g

K o valor segurado

Então

$$w_g = w_g^0 - \gamma K \quad \text{e} \quad w_b = w_b^0 + K(1 - \gamma)$$

Exemplo – restrição orçamentária

Sejam

w_b^0 o patrimônio no estado b quando não é feito o seguro.

w_g^0 o patrimônio no estado g quando não é feito o seguro.

w_b o patrimônio no estado b

w_g o patrimônio no estado g

K o valor segurado

Então

$$w_g = w_g^0 - \gamma K \quad \text{e} \quad w_b = w_b^0 + K(1 - \gamma)$$

Resolvendo as duas equações, de modo a eliminar o K , obtemos

$$w_g + \frac{\gamma}{1 - \gamma} w_b = w_g^0 + \frac{\gamma}{1 - \gamma} w_b^0$$

Exemplo — escolha do consumidor

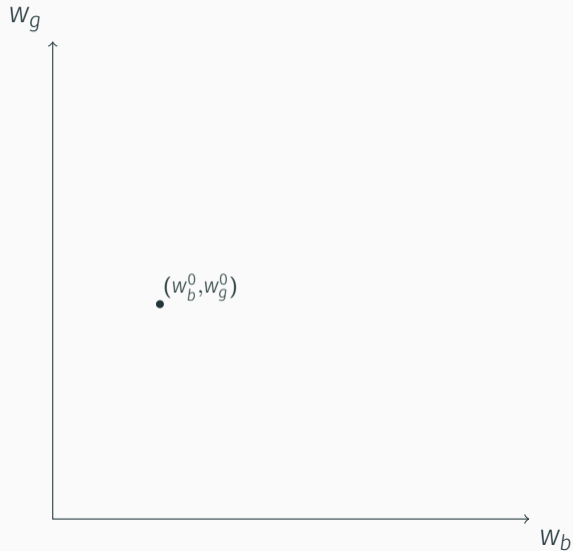
Se as preferências do consumidor forem representadas pela função de utilidade

$$U(w_b, w_g),$$

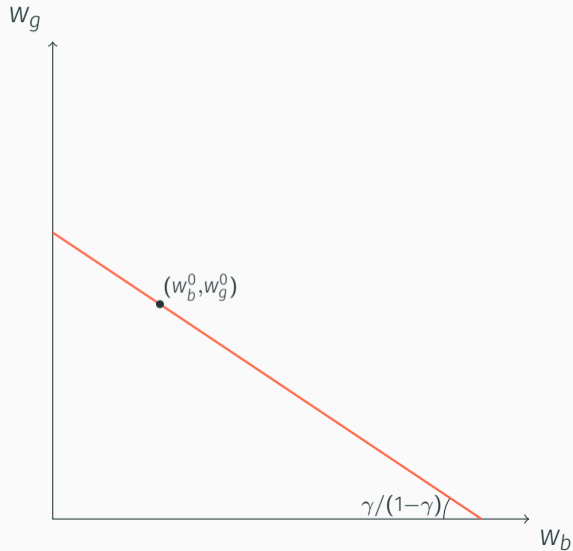
seu problema é escolher w_b e w_g de modo a maximizar essa função, respeitando a restrição orçamentária:

$$w_g + \frac{\gamma}{1-\gamma} w_b = w_g^0 + \frac{\gamma}{1-\gamma} w_b^0$$

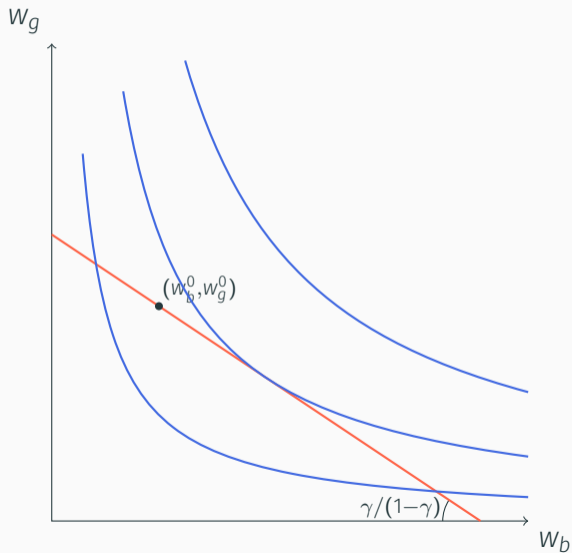
Exemplo – escolha do consumidor



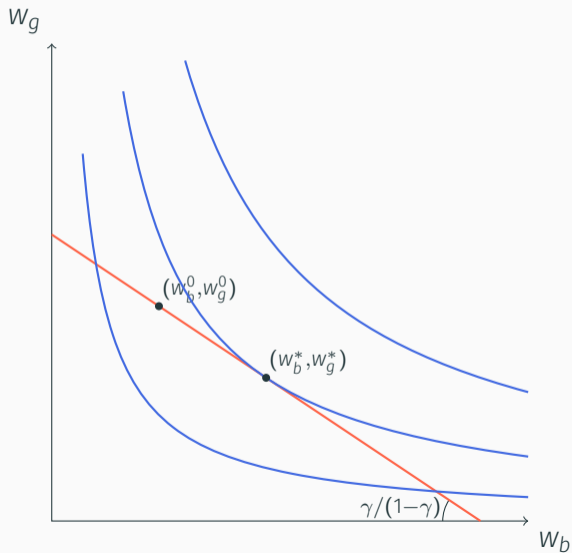
Exemplo – escolha do consumidor



Exemplo – escolha do consumidor



Exemplo – escolha do consumidor



Uma economia na qual existe risco pode ser representada por um modelo de equilíbrio geral no qual existe uma mercadoria para cada bem físico a ser disponibilizado em cada data, localidade e evento. Podemos denominar esse tipo de mercadoria de mercadoria atômica ou mercadoria de Arrow Debreu.

Nessa economia, todos os resultados derivados em nosso modelo de equilíbrio geral se aplicam. Para que isso ocorra, é necessário, entre outras coisas, supor que os mercados da economia são completos, ou seja, que existe um mercado para cada mercadoria atômica.

Utilidade esperada

Mercados contingentes

Utilidade esperada

Posturas diante do risco

- Definições

- Representações gráficas

- Prêmio do risco

- Medida de aversão ao risco

Comportamento de agentes com aversão ao risco

Definição

Uma loteria é um conjunto de prêmios alternativos e mutuamente excludentes, c_1, c_2, \dots, c_n sendo que o prêmio i (para $i = 1, 2, \dots, n$) é associado a uma probabilidade de ocorrência π_i de tal sorte que $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$.

Definição

Uma loteria é um conjunto de prêmios alternativos e mutuamente excludentes, c_1, c_2, \dots, c_n sendo que o prêmio i (para $i = 1, 2, \dots, n$) é associado a uma probabilidade de ocorrência π_i de tal sorte que $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$. Os prêmios podem ser cestas de bens, prêmios monetários ou outras loterias.

Definição

Uma loteria é um conjunto de prêmios alternativos e mutuamente excludentes, c_1, c_2, \dots, c_n sendo que o prêmio i (para $i = 1, 2, \dots, n$) é associado a uma probabilidade de ocorrência π_i de tal sorte que $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$. Os prêmios podem ser cestas de bens, prêmios monetários ou outras loterias.

notação

$$L = (c_1, c_2, \dots, c_n; \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$$

Loteria simples: Os prêmios alternativos c_1, c_2, \dots, c_n não são loterias;

Loteria composta: Ao menos um dos prêmios é uma loteria.

Forma reduzida de uma loteria: é a loteria simples sem prêmios repetidos que dá as probabilidades com que a loteria, composta ou não, pagará prêmios que não são loterias.

Se uma loteria simples não apresenta prêmios repetidos ela é a sua própria forma reduzida. Por exemplo, se c_1 e c_2 são dois prêmios que não sejam loterias tais que $c_1 \neq c_2$, então a forma reduzida de $(c_1, c_2; \pi_1, \pi_2)$ é a mesma loteria $(c_1, c_2; \pi_1, \pi_2)$.

Se uma loteria simples apresenta um ou mais prêmios repetidas vezes, sua forma reduzida apresenta cada prêmio repetido apenas uma vez. Por exemplo, a loteria $(c_1, c_1, c_2; \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ tem forma reduzida $(c_1, c_2; \pi_1 + \pi_2, \pi_3)$.

Reduzindo uma loteria composta a uma loteria simples: Exemplo

Suponha as seguintes loterias nas quais c_1, c_2 não são loterias:

$$L_1 = (c_1, c_2; \pi_1^1, \pi_2^1) \quad L_2 = (c_1, c_2; \pi_1^2, \pi_2^2) \quad \text{e} \quad L_3 = (L_1, L_2; \pi_1^3, \pi_2^3)$$

A forma reduzida da loteria L_3 é

$$(c_1, c_2; \pi_1^3 \pi_1^1 + \pi_2^3 \pi_1^2, \pi_1^3 \pi_2^1 + \pi_2^3 \pi_2^2)$$

Preferências sobre loterias: hipóteses

Preferências completas: $L_i \succsim L_j$ e/ ou $L_j \succsim L_i$, para quaisquer possíveis loterias L_i e L_j .

Preferências transitivas: Para quaisquer loterias possíveis L_i, L_j, L_k , se $L_i \succsim L_j$ e $L_j \succsim L_k$, então $L_i \succsim L_k$.

Equivalência de loterias: para duas loterias possíveis quaisquer L_i e L_j com a mesma forma reduzida, $L_i \sim L_j$.

Preferências sobre loterias: hipóteses (continuação)

Axioma da independência: Sejam L_i , L_j e L_k três loterias possíveis quaisquer então $L_i \succsim L_j$ se, e somente se,

$$(L_i, L_k; \pi, 1 - \pi) \succsim (L_j, L_k; \pi, 1 - \pi).$$

Hipótese de continuidade: Sejam L_i , L_j e L_k três loterias possíveis quaisquer. Então os conjuntos

$$\{\pi \in [0, 1] : (L_i, L_j; \pi, 1 - \pi) \succsim L_k\}$$

e

$$\{\pi \in [0, 1] : L_k \succsim (L_i, L_j; \pi, 1 - \pi)\}$$

são fechados.

Suponha uma consumidora com preferências completas, transitivas, que atendem ao princípio de equivalência de loterias, ao axioma da independência e à hipótese de continuidade. Von-Neumann e Morgenstern mostram que para essa consumidora existem uma função de utilidade $U(L)$ e uma função $u(c)$ na qual c representa um resultado qualquer entre todos os resultados possíveis nas formas reduzidas das loterias, tais que, para qualquer loteria L , com forma reduzida $(c_1, c_2, \dots, c_n; \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$

$$U(L) = \sum_{i=1}^n \pi_i u(c_i) = \mathbb{E}u(c).$$

A função $U(L)$ do slide anterior é chamada *função de utilidade de Von-Neumann e Morgenstern*. A função $u(c)$ é chamada *função de utilidade de Bernoulli*. Note que caso L_1 seja uma loteria que pague o prêmio seguro c com 100% de certeza, então a utilidade de L será

$$U(L_1) = U(c; 1) = 1 \times u(c),$$

o que significa que $u(c)$ representa a utilidade de receber o pagamento seguro c e que a utilidade de uma loteria L com forma reduzida $(c_1, c_2, \dots, c_n; \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ será igual ao valor esperado das utilidades da consumidora quando ela recebe cada um dos pagamentos c_1 a c_n com respectivas probabilidades π_1 a π_n .

Utilidade esperada e loterias compostas

Considere duas loterias com formas reduzidas

$$L_1 = (c_1, c_2, \dots, c_n, \pi_{1,1}, \dots, \pi_{1,n})$$

e

$$L_2 = (c_1, c_2, \dots, c_n, \pi_{2,1}, \dots, \pi_{2,n})$$

e a loteria composta

$$L_3 = (L_1, L_2; \pi_{3,1}, \pi_{3,2})$$

$$U(L_1) = \pi_{1,1}u(c_1) + \pi_{1,2}u(c_2) + \dots + \pi_{1,n}u(c_n)$$

e

$$U(L_2) = \pi_{2,1}u(c_1) + \pi_{2,2}u(c_2) + \dots + \pi_{2,n}u(c_n)$$

Utilidade esperada e loterias compostas (continuação)

Pela hipótese de equivalência de loterias, L_3 é indiferente a

$$[C_1, C_2, \dots, C_n; (\pi_{3,1}\pi_{1,1} + \pi_{3,2}\pi_{2,1}), (\pi_{3,1}\pi_{1,2} + \pi_{3,2}\pi_{2,2}), \dots, (\pi_{3,1}\pi_{1,n} + \pi_{3,2}\pi_{2,n})]$$

Utilidade esperada e loterias compostas (continuação)

Pela hipótese de equivalencia de loterias, L_3 é indiferente a

$$[c_1, c_2, \dots, c_n; (\pi_{3,1}\pi_{1,1} + \pi_{3,2}\pi_{2,1}), (\pi_{3,1}\pi_{1,2} + \pi_{3,2}\pi_{2,2}), \dots, (\pi_{3,1}\pi_{1,n} + \pi_{3,2}\pi_{2,n})]$$

Logo,

$$U(L_3) = (\pi_{3,1}\pi_{1,1} + \pi_{3,2}\pi_{2,1})u(c_1) + (\pi_{3,1}\pi_{1,2} + \pi_{3,2}\pi_{2,2})u(c_2) + \dots + (\pi_{3,1}\pi_{1,n} + \pi_{3,2}\pi_{2,n})u(c_n)$$

Utilidade esperada e loterias compostas (continuação)

Pela hipótese de equivalencia de loterias, L_3 é indiferente a

$$[C_1, C_2, \dots, C_n; (\pi_{3,1}\pi_{1,1} + \pi_{3,2}\pi_{2,1}), (\pi_{3,1}\pi_{1,2} + \pi_{3,2}\pi_{2,2}), \dots, (\pi_{3,1}\pi_{1,n} + \pi_{3,2}\pi_{2,n})]$$

Logo,

$$\begin{aligned} U(L_3) &= (\pi_{3,1}\pi_{1,1} + \pi_{3,2}\pi_{2,1})u(C_1) + (\pi_{3,1}\pi_{1,2} + \pi_{3,2}\pi_{2,2})u(C_2) + \dots + \\ &\quad (\pi_{3,1}\pi_{1,n} + \pi_{3,2}\pi_{2,n})u(C_n) \\ &= \pi_{3,1} [\pi_{1,1}u(C_1) + \pi_{1,2}u(C_2) + \dots + \pi_{1,n}u(C_n)] + \\ &\quad \pi_{3,2} [\pi_{2,1}u(C_1) + \pi_{2,2}u(C_2) + \dots + \pi_{2,n}u(C_n)] \end{aligned}$$

Utilidade esperada e loterias compostas (continuação)

Pela hipótese de equivalencia de loterias, L_3 é indiferente a

$$[c_1, c_2, \dots, c_n; (\pi_{3,1}\pi_{1,1} + \pi_{3,2}\pi_{2,1}), (\pi_{3,1}\pi_{1,2} + \pi_{3,2}\pi_{2,2}), \dots, (\pi_{3,1}\pi_{1,n} + \pi_{3,2}\pi_{2,n})]$$

Logo,

$$\begin{aligned} U(L_3) &= (\pi_{3,1}\pi_{1,1} + \pi_{3,2}\pi_{2,1})u(c_1) + (\pi_{3,1}\pi_{1,2} + \pi_{3,2}\pi_{2,2})u(c_2) + \dots + \\ &\quad (\pi_{3,1}\pi_{1,n} + \pi_{3,2}\pi_{2,n})u(c_n) \\ &= \pi_{3,1} [\pi_{1,1}u(c_1) + \pi_{1,2}u(c_2) + \dots + \pi_{1,n}u(c_n)] + \\ &\quad \pi_{3,2} [\pi_{2,1}u(c_1) + \pi_{2,2}u(c_2) + \dots + \pi_{2,n}u(c_n)] \\ &= \pi_{3,1}U(L_1) + \pi_{3,2}U(L_2) \end{aligned}$$

Definição

Caso tenhamos $V(\cdot) = a + bU(\cdot)$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$. Dizemos que $V(\cdot)$ é uma transformação monotônica afim de $U(\cdot)$.

Definição

Caso tenhamos $V(\cdot) = a + bU(\cdot)$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$. Dizemos que $V(\cdot)$ é uma transformação monotônica afim de $U(\cdot)$.

Propriedade da utilidade esperada

$U(\cdot)$ e $V(\cdot)$ são funções de utilidade que representam as mesmas preferências e têm propriedade utilidade esperada, se, e somente se, forem transformações monotônicas afim uma da outra.

Definição

Caso tenhamos $V(\cdot) = a + bU(\cdot)$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$. Dizemos que $V(\cdot)$ é uma transformação monotônica afim de $U(\cdot)$.

Propriedade da utilidade esperada

$U(\cdot)$ e $V(\cdot)$ são funções de utilidade que representam as mesmas preferências e têm propriedade utilidade esperada, se, e somente se, forem transformações monotônicas afim uma da outra.

Concavidade

Note que a concavidade ou convexidade de uma função é preservada por transformações monotônicas afim.

Valor esperado de uma loteria

Caso uma loteria

$$(C_1, C_2, \dots, C_n; \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$$

ofereça apenas prêmios monetários, é possível definir o valor esperado dessa loteria por

$$VE = \pi_1 C_1 + \pi_2 C_2 + \dots + \pi_n C_n = \sum_{i=1}^n \pi_i C_i$$

Posturas diante do risco

Estrutura da aula

Mercados contingentes

Utilidade esperada

Posturas diante do risco

- Definições

- Representações gráficas

- Prêmio do risco

- Medida de aversão ao risco

Comportamento de agentes com aversão ao risco

Mercados contingentes

Utilidade esperada

Posturas diante do risco

- Definições

- Representações gráficas

- Prêmio do risco

- Medida de aversão ao risco

Comportamento de agentes com aversão ao risco

Aversão ao risco

Diz-se que um consumidor é **aveso ao risco** caso ele prefira o valor esperado dos prêmios de uma loteria com prêmios monetário a essa loteria.

Aversão ao risco

Diz-se que um consumidor é avesso ao risco caso ele prefira o valor esperado dos prêmios de uma loteria com prêmios monetário a essa loteria.

Propensão ao risco

Diz-se que um consumidor é **propenso ao risco** caso ele prefira uma loteria com prêmios monetário ao valor esperado dos prêmios dessa loteria.

Aversão ao risco

Diz-se que um consumidor é avesso ao risco caso ele prefira o valor esperado dos prêmios de uma loteria com prêmios monetário a essa loteria.

Propensão ao risco

Diz-se que um consumidor é propenso ao risco caso ele prefira uma loteria com prêmios monetário ao valor esperado dos prêmios dessa loteria.

Neutralidade frente ao risco

Diz-se que um consumidor é **risco neutro** caso ele seja indiferente entre uma loteria com prêmios monetário e o valor esperado dos prêmios dessa loteria.

Estrutura da aula

Mercados contingentes

Utilidade esperada

Posturas diante do risco

Definições

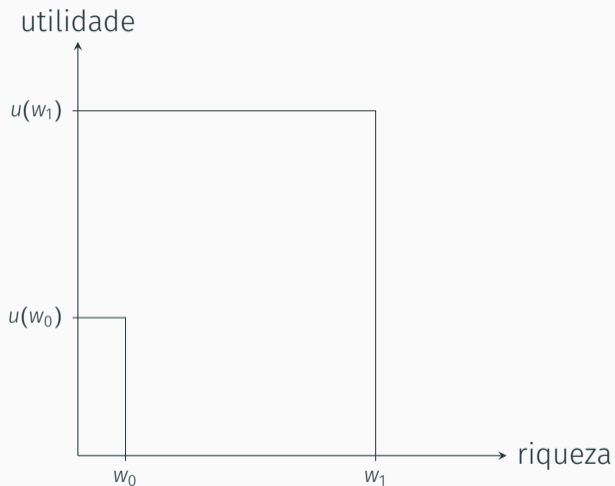
Representações gráficas

Prêmio do risco

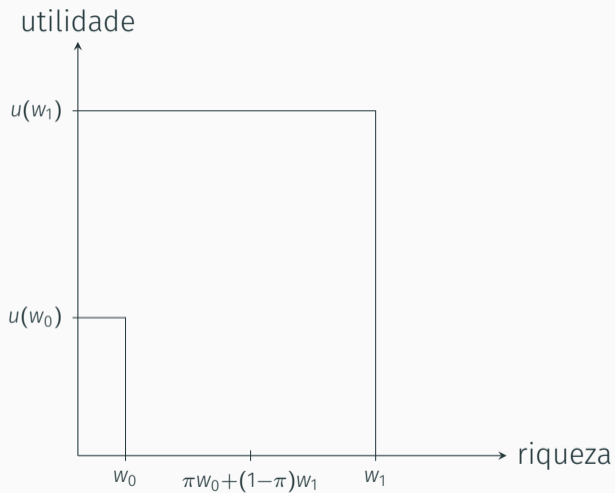
Medida de aversão ao risco

Comportamento de agentes com aversão ao risco

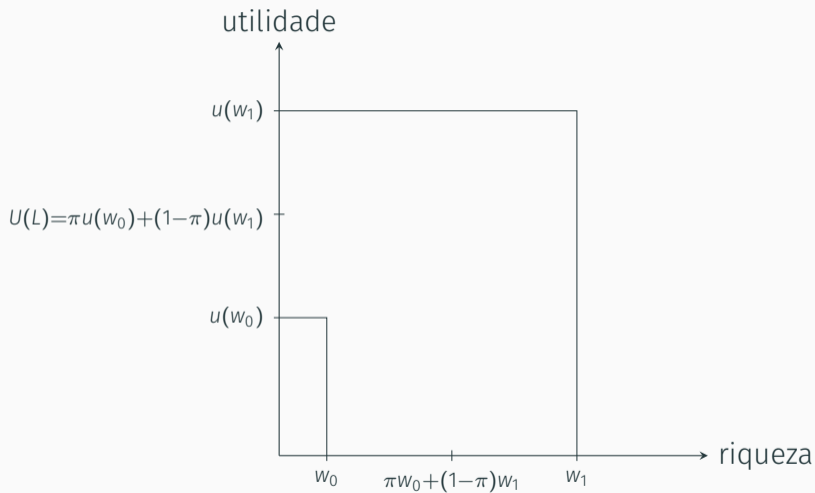
Aversão ao risco: representação gráfica



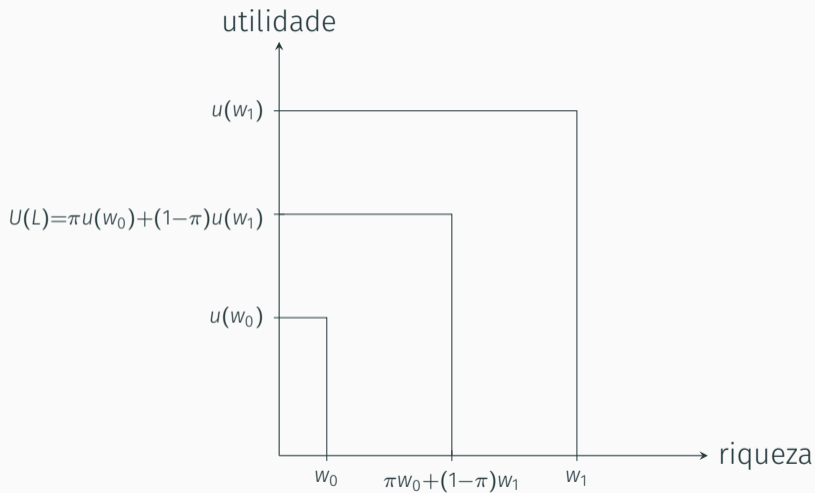
Aversão ao risco: representação gráfica



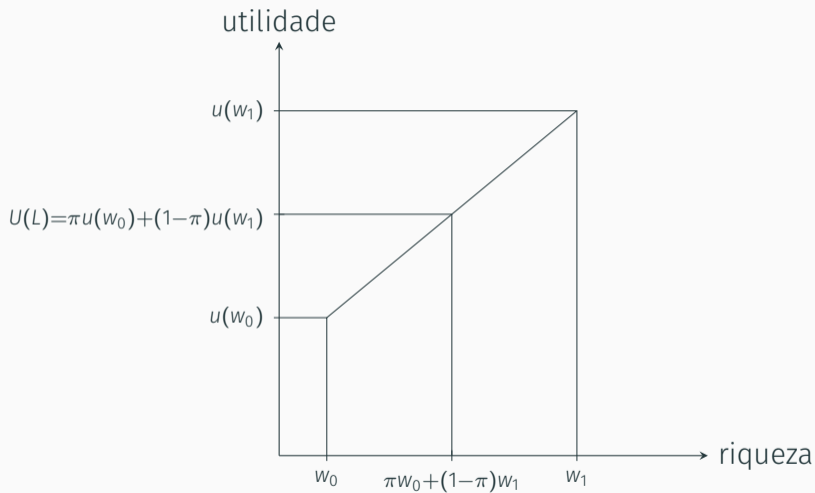
Aversão ao risco: representação gráfica



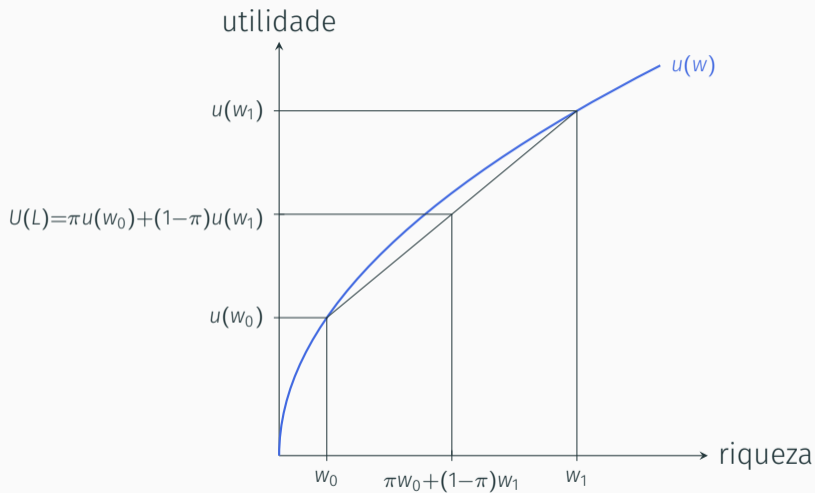
Aversão ao risco: representação gráfica



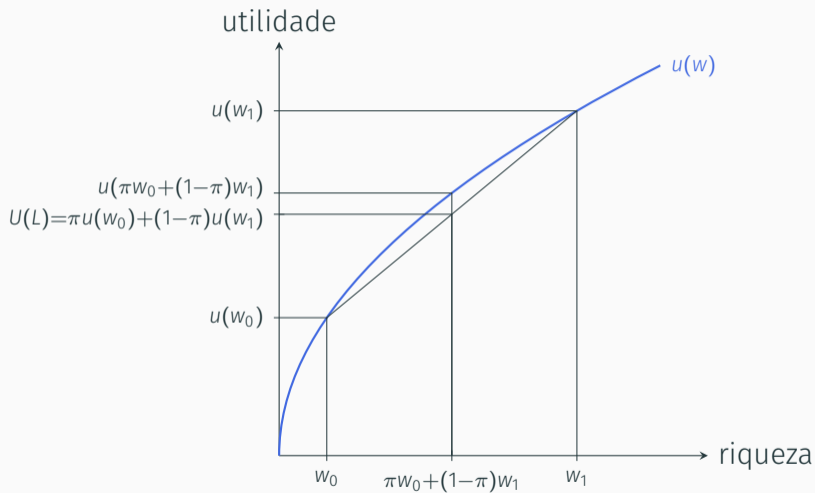
Aversão ao risco: representação gráfica



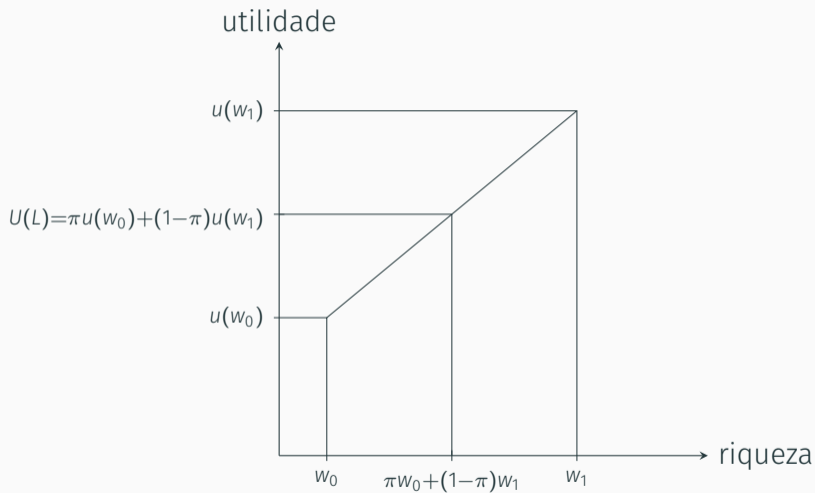
Aversão ao risco: representação gráfica



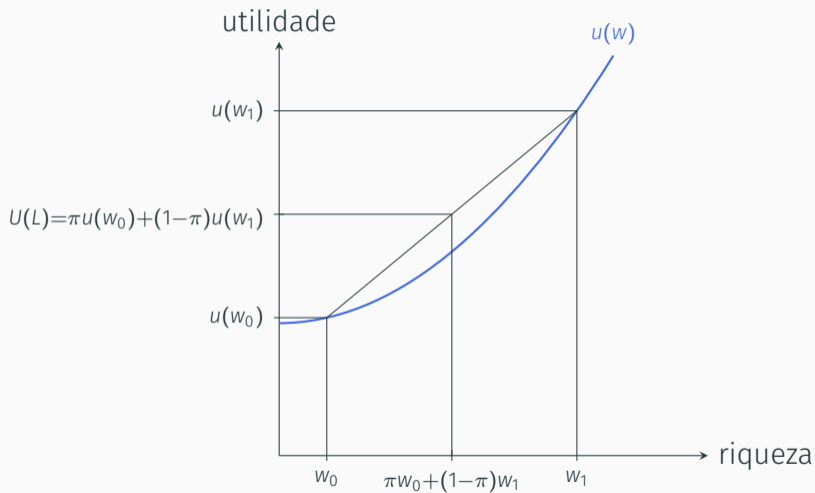
Aversão ao risco: representação gráfica



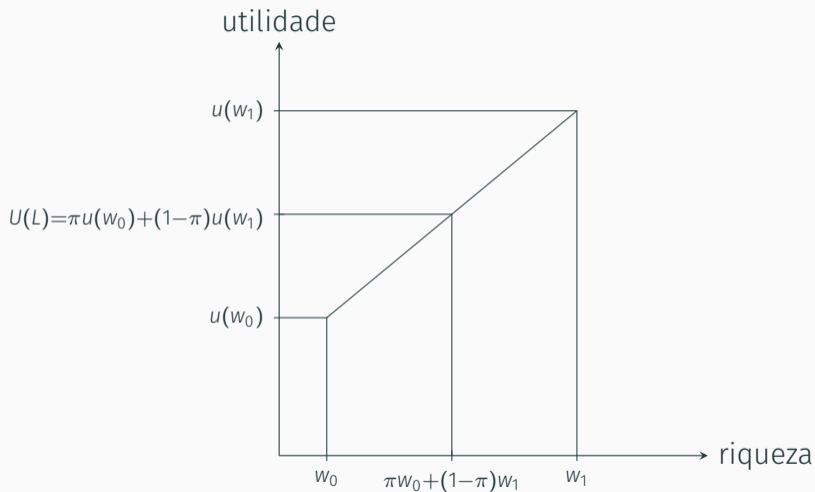
Propensão ao risco: representação gráfica



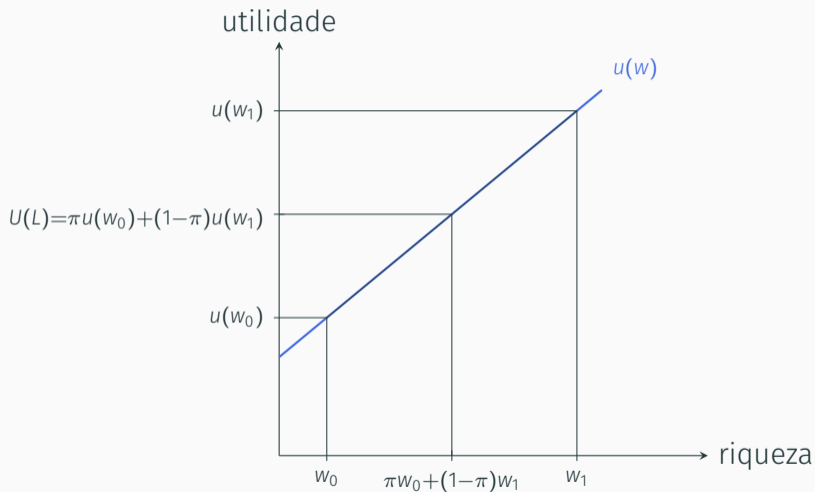
Propensão ao risco: representação gráfica



Neutralidade frente ao risco: representação gráfica



Neutralidade frente ao risco: representação gráfica



Mercados contingentes

Utilidade esperada

Posturas diante do risco

Definições

Representações gráficas

Prêmio do risco

Medida de aversão ao risco

Comportamento de agentes com aversão ao risco

Equivalente Seguro

O **equivalente seguro** de uma loteria monetária é o valor 100% seguro que o consumidor considera indiferente à loteria.

Equivalente Seguro

O equivalente seguro de uma loteria monetária é o valor 100% seguro que o consumidor considera indiferente à loteria.

Prêmio do risco

O **prêmio do risco** de uma loteria monetária é a diferença entre o valor esperado dessa loteria e seu equivalente seguro.

Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern: $u(w) = \sqrt{w}$

Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern: $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que w pode assumir: 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern: $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que w pode assumir: 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

Valor esperado: $VE = \frac{9 + 25}{2} = 17$

Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern: $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que w pode assumir: 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

Valor esperado: $VE = \frac{9 + 25}{2} = 17$

Utilidade esperada: $UE = \frac{3 + 5}{2} = 4$

Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern: $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que w pode assumir: 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

Valor esperado: $VE = \frac{9 + 25}{2} = 17$

Utilidade esperada: $UE = \frac{3 + 5}{2} = 4$

Equivalente seguro: $\sqrt{ES} = 4 \Rightarrow ES = 16$

Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern: $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que w pode assumir: 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

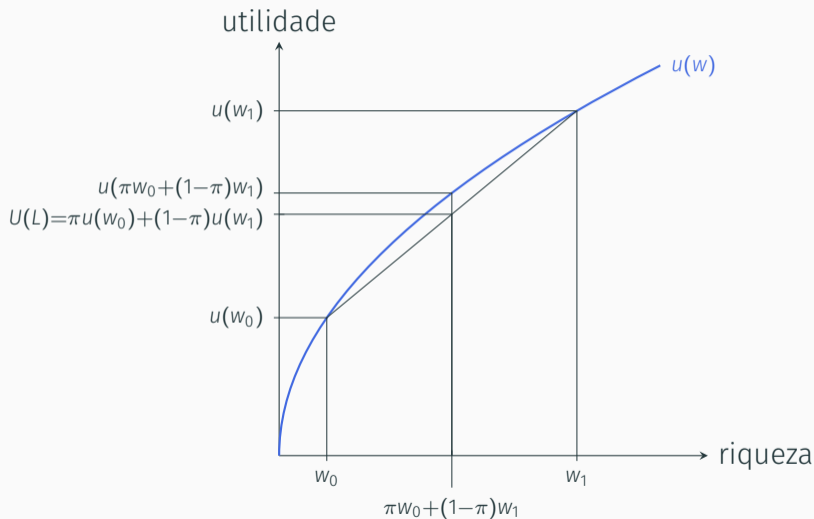
Valor esperado: $VE = \frac{9 + 25}{2} = 17$

Utilidade esperada: $UE = \frac{3 + 5}{2} = 4$

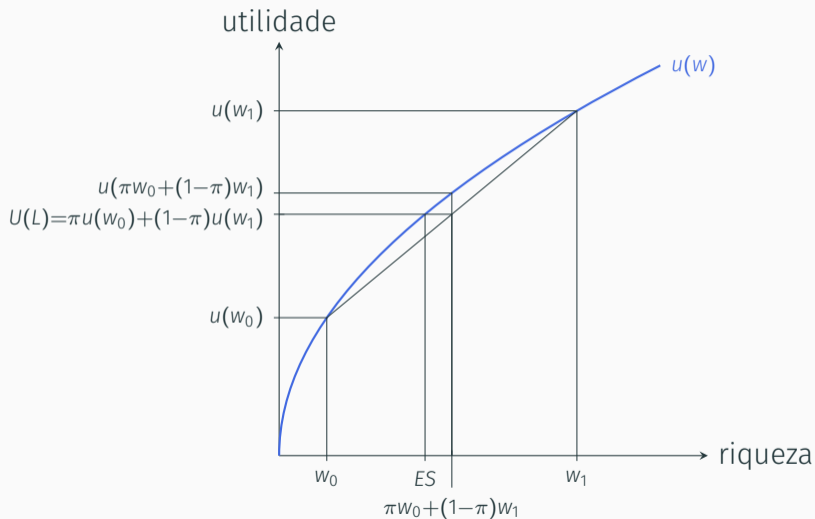
Equivalente seguro: $\sqrt{ES} = 4 \Rightarrow ES = 16$

Prêmio do risco: $PR = VE - ES = 17 - 16 = 1$

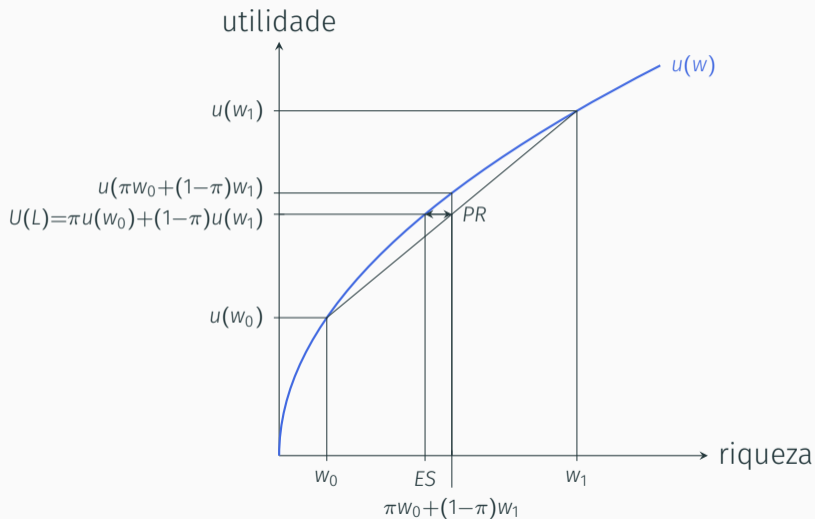
Equivalente seguro e prêmio de risco: representação gráfica



Equivalente seguro e prêmio de risco: representação gráfica



Equivalente seguro e prêmio de risco: representação gráfica



Mercados contingentes

Utilidade esperada

Posturas diante do risco

Definições

Representações gráficas

Prêmio do risco

Medida de aversão ao risco

Comportamento de agentes com aversão ao risco

Aversão absoluta R_A

$$R_A = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Aversão absoluta R_A

$$R_A = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Interpretação

$$R_A = -\frac{\text{variação \% na UMg}}{\text{variação na riqueza}}$$

Taxa de variação da UMg em relação à riqueza.

Aversão absoluta R_A

$$R_A = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Aversão relativa R_R

$$R_R = -w \frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Interpretação

$$R_A = -\frac{\text{variação \% na UMg}}{\text{variação na riqueza}}$$

Taxa de variação da UMg em relação à riqueza.

Medidas de Arrow-Pratt aversão ao risco

Aversão absoluta R_A

$$R_A = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Interpretação

$$R_A = -\frac{\text{variação \% na UMg}}{\text{variação na riqueza}}$$

Taxa de variação da UMg em relação à riqueza.

Aversão relativa R_R

$$R_R = -w \frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Interpretação

$$R_R = -\frac{\text{variação \% na UMg}}{\text{variação \% na riqueza}}$$

Elasticidade da UMg em relação à riqueza.

Função de utilidade com aversão absoluta ao risco constante (CARA)

$$u(w) = -e^{-aw}$$

Função de utilidade com aversão absoluta ao risco constante (CARA)

$$u(w) = -e^{-aw}$$

$$R_A = \frac{ae^{-aw}}{e^{-aw}}$$

Função de utilidade com aversão absoluta ao risco constante (CARA)

$$u(w) = -e^{-aw}$$

$$R_A = \frac{ae^{-aw}}{e^{-aw}} = a$$

Função de utilidade com aversão absoluta ao risco constante (CARA)

$$u(w) = -e^{-aw}$$

$$R_A = \frac{ae^{-aw}}{e^{-aw}} = a$$

CARA e o prêmio de risco

Seja $\tilde{\epsilon} = \tilde{w} - \mathbb{E}\tilde{w}$, em que \tilde{w} é a riqueza incerta de um investidor e \mathbb{E} é o operador esperança matemática. Se suas preferências forem CARA, o prêmio de risco $p(\tilde{w})$ será

$$p = \frac{\ln \mathbb{E}e^{-a\tilde{\epsilon}}}{a}.$$

Tal prêmio depende apenas da distribuição do desvio em relação ao valor esperado e não desse valor esperado.

Exemplo

A riqueza de um investidor pode assumir os valores R\$11 milhões ou R\$9 milhões, ambos com probabilidade de 50%. Sua função de utilidade de Bernoulli é

$$u(w) = -e^{-\frac{w}{2}}$$

em que w é medido em R\$ milhões. Pergunta-se:

1. Qual o coeficiente de aversão absoluta ao risco desse investidor?
2. Qual o prêmio de risco desse investidor considerando a distribuição de probabilidade de sua riqueza?
3. Se essa distribuição de probabilidade se alterar para R\$15 milhões e R\$13 milhões, ambos valores com probabilidade de 50%, qual será o novo prêmio de risco?

Função de utilidade com aversão relativa ao risco constante (CRRA)

$$u(w) = \begin{cases} \frac{w^{1-a}}{1-a} & \text{se } a \neq 1 \\ \ln w & \text{se } a = 1 \end{cases}$$

Função de utilidade com aversão relativa ao risco constante (CRRA)

$$u(w) = \begin{cases} \frac{w^{1-a}}{1-a} & \text{se } a \neq 1 \\ \ln w & \text{se } a = 1 \end{cases}$$

$$R_R = \begin{cases} -w \frac{-a(1-a)w^{-(a+1)}}{(1-a)w^{-a}} = a & \text{caso } a \neq 1 \\ -w \frac{-\frac{1}{w^2}}{\frac{1}{w}} = 1 & \text{caso } a = 1 \end{cases}$$

Utilidade CRRA e prêmio do risco

Seja, (\tilde{w}) a variável aleatória que representa a renda incerta do investidor e sejam

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{w} - \mathbb{E}\tilde{w}}{\mathbb{E}\tilde{w}},$$

e o prêmio de risco relativo \mathfrak{p} definido por

$$u[(1 - \mathfrak{p})\mathbb{E}\tilde{w}] = \mathbb{E}u(\tilde{w}) = \mathbb{E}u[(1 + \tilde{\varepsilon})\mathbb{E}\tilde{w}]$$

Utilidade CRRA e prêmio do risco

Seja, (\tilde{w}) a variável aleatória que representa a renda incerta do investidor e sejam

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{w} - \mathbb{E}\tilde{w}}{\mathbb{E}\tilde{w}},$$

e o prêmio de risco relativo \mathfrak{p} definido por

$$u[(1 - \mathfrak{p})\mathbb{E}\tilde{w}] = \mathbb{E}u(\tilde{w}) = \mathbb{E}u[(1 + \tilde{\varepsilon})\mathbb{E}\tilde{w}]$$

Então, para um consumidor com utilidade CRRA,

$$\mathfrak{p} = 1 - \left[\mathbb{E}(1 + \tilde{\varepsilon})^{1-a} \right]^{\frac{1}{1-a}}.$$

O prêmio de risco como fração da riqueza esperada (prêmio de risco relativo) depende apenas da distribuição dos desvios da riqueza como frações da riqueza esperada (desvios relativos).

Exemplo

A riqueza esperada de um investidor é R\$1 000. A distribuição de probabilidade de sua riqueza é tal que esta pode ser 10% superior ou 10% inferior a esse valor, com iguais probabilidades de 50%. Sua função de utilidade de Bernoulli é

$$u(w) = \sqrt{w}.$$

Pergunta-se:

1. Qual o coeficiente de aversão relativa ao risco desse investidor?
2. Qual o prêmio relativo de risco desse investidor considerando a distribuição de probabilidade de sua riqueza?

Exemplo (continuação)

A riqueza esperada de um investidor é R\$1 000. A distribuição de probabilidade de sua riqueza é tal que esta pode ser 10% superior ou 10% inferior a esse valor, com iguais probabilidades de 50%. Sua função de utilidade de Bernoulli é

$$u(w) = \sqrt{w}.$$

Pergunta-se:

3. Qual seu prêmio de risco em R\$?
4. Se a riqueza esperada desse consumidor fosse R\$2 000, e a distribuição do desvio relativo fosse a mesma, qual seria seu prêmio relativo de risco? E seu prêmio de risco em R\$?

Comportamento de agentes com aversão ao risco

Loterias atuarialmente justas

Loterias atuarialmente justas são loterias que geram um ganho esperado líquido igual a zero.

Exemplos

1. Não pagar nada para entrar no seguinte jogo: se o resultado do lançamento de uma moeda não viciada for cara, você receberá R\$10,00, se for coroa, você pagará R\$10,00.

Loterias atuarialmente justas

Loterias atuarialmente justas são loterias que geram um ganho esperado líquido igual a zero.

Exemplos

1. Não pagar nada para entrar no seguinte jogo: se o resultado do lançamento de uma moeda não viciada for cara, você receberá R\$10,00, se for coroa, você pagará R\$10,00.
2. Um seguro com preço de R\$1.000,00 contra o roubo de um automóvel que vale R\$10.000,00 cuja probabilidade é de 10%.

Suponha que um consumidor avesso ao risco tenha uma riqueza w que poderá ser reduzida de um valor L , por exemplo, em virtude do roubo de seu automóvel, com probabilidade π . Se uma seguradora oferecer segurar qualquer parcela dessa perda a uma taxa atuarialmente justa, ou seja, cobrando $\gamma = \pi$ reais por real segurado, quanto esse consumidor deverá segurar?

Solução (a)

Seja K o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K)$$

Solução (a)

Seja K o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K - \gamma K)$$

Solução (a)

Seja K o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K - \gamma K) + (1 - \pi)(w - L)$$

Solução (a)

Seja K o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K - \gamma K) + (1 - \pi)(w - \gamma K)$$

Solução (a)

Seja K o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K - \gamma K) + (1 - \pi)(w - \gamma K)$$

Simplificando,

Solução (a)

Seja K o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K - \gamma K) + (1 - \pi)(w - \gamma K)$$

Simplificando,

$$w_e = w - \pi(L - K) - \gamma K$$

Solução (a)

Seja K o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K - \gamma K) + (1 - \pi)(w - \gamma K)$$

Simplificando,

$$w_e = w - \pi(L - K) - \gamma K$$

Como, por hipótese, $\gamma = \pi$,

$$w_e = w - \pi L$$

Solução (a)

Seja K o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K - \gamma K) + (1 - \pi)(w - \gamma K)$$

Simplificando,

$$w_e = w - \pi(L - K) - \gamma K$$

Como, por hipótese, $\gamma = \pi$,

$$w_e = w - \pi L$$

Portanto, a riqueza esperada não é afetada pelo valor segurado K , caso o seguro seja atuarialmente justo.

- Caso o consumidor segure todo o valor L , todo o risco será eliminado.

Solução (b)

- Caso o consumidor segure todo o valor L , todo o risco será eliminado.
- Qualquer outro valor para L envolverá algum risco, pois sua riqueza em caso de ocorrência da perda será diferente de sua riqueza caso essa perda não ocorra.

Solução (b)

- Caso o consumidor segure todo o valor L , todo o risco será eliminado.
- Qualquer outro valor para L envolverá algum risco, pois sua riqueza em caso de ocorrência da perda será diferente de sua riqueza caso essa perda não ocorra.
- Como o consumidor é avesso ao risco e como o valor esperado da riqueza não é afetado, quando $\gamma = \pi$, pela escolha de K . Ele deve preferir $K = L$ a qualquer outra alternativa.

Quando investir em um ativo de risco?

Um consumidor com aversão a risco pode dividir sua riqueza w em dois ativos: um livre de risco com taxa rentabilidade r_f e um ativo com risco com taxa de rentabilidade dependente da ocorrência de dois eventos complementares de acordo com a tabela abaixo:

Evento	taxa de rentabilidade	probabilidade
E_0	r_0	π
E_1	r_1	$1 - \pi$

Sob que condições vale a pena investir parte de sua riqueza no ativo com risco?

Solução (a)

Seja x o valor investido no ativo com risco. Então, caso ocorra o evento i , $i = 0, 1$, sua riqueza será igual a

$$(w - x)(1 + r_f) + x(1 + r_i) = w(1 + r_f) + x(r_i - r_f).$$

Solução (a)

Seja x o valor investido no ativo com risco. Então, caso ocorra o evento i , $i = 0, 1$, sua riqueza será igual a

$$(w - x)(1 + r_f) + x(1 + r_i) = w(1 + r_f) + x(r_i - r_f).$$

Assim, a utilidade esperada de nosso consumidor será

$$UE = \pi u[w(1 + r_f) + x(r_0 - r_f)] + (1 - \pi)u[w(1 + r_f) + x(r_1 - r_f)]$$

Na qual u é a função de utilidade de Bernoulli. Se UE for crescente em relação a x em $x = 0$, o consumidor deve investir parte de sua riqueza no ativo de risco.

Supondo que UE seja diferenciável, ela será crescente quando $x = 0$ e somente se, nesse ponto $\frac{d}{dx}UE > 0$.

Solução (b)

Derivando UE em relação a x obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}UE &= \pi(r_1 - r_f)u'[w(1 + r_f) + x(r_1 - r_f)] \\ &\quad + (1 - \pi)(r_0 - r_f)u'[w(1 + r_f) + x(r_0 - r_f)].\end{aligned}$$

Solução (b)

Derivando UE em relação a x obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}UE &= \pi(r_1 - r_f)u'[w(1 + r_f) + x(r_1 - r_f)] \\ &\quad + (1 - \pi)(r_0 - r_f)u'[w(1 + r_f) + x(r_0 - r_f)].\end{aligned}$$

Quando $x = 0$, isso se reduz a

$$\begin{aligned}\pi(r_0 - r_f)u'[w(1 + r_f)] + (1 - \pi)(r_1 - r_f)u'[w(1 + r_f)] \\ = [\pi r_0 + (1 - \pi)r_1 - r_f]u'[w(1 + r_f)].\end{aligned}$$

Assumindo que a utilidade seja crescente em relação a riqueza, concluímos que

$\frac{d}{dx}UE > 0$ quando $x = 0$ se, e apenas se,

$$\underbrace{\pi r_0 + (1 - \pi)r_1}_{\text{rentabilidade esperada do ativo}} > r_f.$$

rentabilidade
esperada do
ativo