REC02101 – MICROECONOMIA
SEGUNDA PROVA (2011)

ROBERTO GUENA

(1) (4 pontos) Considere um modelo de um consumidor que vive dois períodos. No primeiro período esse consumidor recebe uma renda w e, sua renda no segundo período é zero. Caso esse consumidor não consuma toda sua renda do primeiro período, ele pode aplicar o valor poupado em um investimento que lhe rende uma taxa de juros real r entre os dois períodos. As preferências desse consumidor dependem apenas nos valores c_1 e c_2 de seu consumo nos períodos 1 e 2, respectivamente. Encontre a função de poupança desse consumidor, expressa em termos de w e r para as seguintes funções de utilidade:
(a) $U(c_1, c_2) = -c_1^{-1} - c_2^{-1}$
(b) $U(c_1, c_2) = \sqrt{c_1 c_2}$
(c) $U(c_1, c_2) = \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}$
Em cada um desses casos, determine se a poupança é crescente ou decrescente em relação à taxa de juros r.

SOLUÇÃO

Nos três itens, precisamos inicialmente encontrar quanto o consumidor escolherá consumir em cada período, dada e restrição de que o valor futuro de seu fluxo de consumo não ultrapasse o valor futuro de seu fluxo de renda. Essa escolha será aque que maximiza sua função de utilidade

$$U(c_1, c_2)$$

dada a restrição

$$(1+r)c_1 + c_2 \leq (1+r)w.$$

A função de poupanção será dada pela diferença entre a renda de nosso consumidor e seu consumo no período inicial.

Nos três casos, esse consumo é encontrado aplicando-se o método de Lagrange, ou diretamente a condição de igualdade entre o valor absoluto da taxa marginal de substituição e o preço relativo do consumo, que, sabemos, deriva da condição de primeira ordem de utilidade máxima: $1+r$:

$$\begin{cases} |TMS| = 1+r \\ (1+r)c_1 + c_2 = (1+r)w \end{cases} \tag{1}$$

Façamos isso, portanto, para os três casos.

(a) As utilidades marginais do consumo nos dois períodos são

$$UMg_1 = \frac{\partial U(c_1, c_2)}{\partial c_1} = \frac{1}{c_1^2} \quad \text{e} \quad UMg_2 = \frac{\partial U(c_1, c_2)}{\partial c_2} = \frac{1}{c_2^2}$$

Assim, o módulo da taxa marginal de substituição é $|TMS| = c_2^2/c_1^2$. Substituindo no sistema (1) obtemos

$$\begin{cases} \frac{c_2^2}{c_1^2} = (1+r) \\ (1+r)c_1 + c_2 = w \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema para c_1 e c_2 obtemos

$$c_1(r,w) = \frac{w\sqrt{1+r}}{1+\sqrt{1+r}}.$$

Assim, a poupança no período 1 será

$$s(r,w) = w - c_1(r,w) = \frac{w}{1+\sqrt{1+r}}.$$

Claramente, a poupança dada por essa função é decrescente em relação a r.

(b) Caso a função de utilidade seja $U(c_1,c_2) = \sqrt{c_1 c_2}$, as utilidade marginais serão

$$UMg_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \quad \text{e} \quad UMg_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}.$$

Portanto, a taxa marginal de substituição será $|TMS| = c_2/c_1$, e o sistema de equações (1) fica

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = 1+r \\ (1+r)c_1 + c_2 = (1+r)w \end{cases}$$

Resolvendo para c_1 e c_2, obtemos

$$c_1(r,w) = \frac{w}{2} \quad \text{e} \quad c_2(r,w) = (1+r)\frac{w}{w}.$$

A poupança no período 1 será, portanto,

$$s_1(r,w) = w - c_1(r,w) = \frac{w}{2}.$$

Assim, para essa função de utilidade, a poupança é invariante em relação à taxa de juros. Isso não será surpresa para quem reconhecer que a função de utilidade desse exercício é do tipo Cobb-Douglas com coeficientes iguais a 1/2, e que, portanto, o consumidor deverá destinar metade de sua renda ao consumo de cada bem.

(c) Para a função de utilidade $U(c_1,c_2) = \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}$ as utilidades marginais são

$$UMg_1 = \frac{1}{2\sqrt{c_1}} \quad \text{e} \quad UMg_2 = \frac{1}{2\sqrt{c_2}}$$

Portanto, a taxa marginal de susbstituição é $|TMS| = \sqrt{c_2}/\sqrt{c_1}$. Substituindo no sistema (1), ficamos com

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{c_1}} = 1+r \\ (1+r)c_1 + c_2 = (1+r)w \end{cases}$$

Resovendo o sistema, obtemos

$$c_1(r,w) = \frac{w}{2+r} \quad \text{e} \quad c_2(r,w) = \frac{(1+r)^2}{2+r}w.$$

A poupança será, assim dada por

$$s(r,w) = w - c_1 = w - \frac{w}{2+r} = \frac{1+r}{2+r}w.$$

Ela é crescente em relação a r. Isso pode ser visto diretamente observando que $c_1(r,w)$ é decrescente em relação a r ou notando que

$$\frac{\partial s(r,w)}{\partial r} = \frac{(2+r)-2(1+r)}{(2+r)^2}w = -\frac{r}{(2+r)^2}w < 0$$

(2) (3 pontos) Um consumidor possui uma renda igual a R$ 1.200,00. Ele consome apenas dois bens – o bem 1 e o bem 2. O preço do bem 2 é constante e igual a R$ 4,00 por unidade. Calcule a variação equivalente e a variação compensatória associadas a uma elevação no preço do bem 1 de R$ 1,00 por unidade para R$ 4,00 por unidade supondo que a função de utilidade desse consumidor seja $U(x_1,x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$.

SOLUÇÃO

Primeiramente, encontremos as funções de demanda pelos dois bens. Podemos fazer isso empregando o método de Lagrange ou aplicando diretamente a condição que já conhecemos de igualdede entre o valor absoluto da taxa marginal de substituição e o preço relativo dos dois bens sobre a linha de restrição orçamentária.

As utilidades marginais dos dois bens são:

$$UMg_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}(\ln x_1 + \ln x_2) = \frac{1}{x_1} \quad \text{e} \quad UMg_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}(\ln x_1 + \ln x_2) = \frac{1}{x_2}$$

Portanto,

$$|TMS| = \frac{UMg_1}{UMg_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Assim, as condições de utilidade máxima ficam

$$\begin{cases} |TMS| = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \\ p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{cases}$$

Nas quais, p_1 e p_2 são os preços dos bens 1 e 2, respectivament, m é a renda do consumidor. Resolvendo para x_1 e x_2, encontramos as funções de demanda

$$x_1(p_1,p_2,m) = \frac{m}{2p_1} \quad \text{e} \quad x_2(p_1,p_2,m) = \frac{m}{2p_2}.$$

Você poderia chegar diretamente a essas funções de demanda se observasse que a função de utilidade desse exercício é uma transformação monotônica da função de utilidade Cobb-Douglas $V(x_1,x_2) = x_1x_2$.

Utilizemos as funções de demanda encontradas acima para definir a função de utilidade indireta:

$$V(p_1,p_2,m) = \ln\left(\frac{m}{2p_1}\right) + \ln\left(\frac{m}{2p_2}\right) = 2\ln m - \ln 4 - \ln p_1 - \ln p_2$$

Assim, na situação inicial com o preço do bem 1 dado por $p_1^0 = 1$, o preço do bem 2 dado por $p_2^0 = 4$ e a renda dada por $m^0 = 1200$, a utilidade de nosso consumidor é

$$U^0 = 2\ln 1200 - ln 4 - \ln 1 - \ln 4 = 2\ln 1200 - 2\ln 4.$$

Na situação final na qual os preço do bem 2 e a renda não se alteram em relação à situação inicial ($p_2^1 = 4$ e $m^1 = 120$)) e o preço do bem 1 passa a ser $p_1^1 = 4$, a utilidade de nosso consumidor é

$$U^1 = 2\ln 1200 - \ln 4 - \ln 4 - \ln 4 = 2\ln 1200 - 3\ln 4.$$

Para encontrarmos a variação equivalente, empregamos a definição

$$\begin{aligned} V(p_1^0, p_2^0, m^0 + VE) &= V(p_1^1, p_2^1, m^1) = U^1 \\ 2\ln(1200 + VE) - \ln 4 - \ln 1 - \ln 4 &= 2\ln 1200 - 3\ln 4 \\ \ln(1200 + VE) &= \ln 1200 \frac{-\ln 4}{2} \\ 1200 + VE &= 600 \\ VE &= -600. \end{aligned}$$

Para achar a variação compensatória, empregamos a definição

$$\begin{aligned} V(p_1^1, p_2^1, m^1 - VC) &= V(p_1^0, p_2^0, m^0) = U^0 \\ 2\ln(1200 - VC) - \ln 4 - \ln 4 - \ln 4 &= 2\ln 1200 - 2\ln 4 \\ \ln(1200 - VC) &= \ln 1200 + \frac{\ln 4}{2} \\ 1200 - VC &= 2400 \\ VC &= -1200. \end{aligned}$$

(3) (3 pontos) A função de utilidade de Von Neumann-Morgenstern de uma consumidora é $U(w) = \sqrt{w}$ na qual w é o valor a ser assumido por sua riqueza. Ela possui uma riqueza segura a qual pode aplicar, total ou parcialmente, em um ativo que sofrerá uma valorização de com probabilidade de $1/3$ de seu valor com probabilidade de 50% e uma desvalorização de $1/4$ de seu valor com igual probabilidade. Determine a fração de sua riqueza inicial que ela deverá investir em tal ativo.

SOLUÇÃO

Seja x a parcela de sua riqueza que a consumidora destinará à aquisição do ativo com risco. Caso a rentabilidade do ativo com risco seja de $1/3$, sua riqueza será $w(1-x)+\frac{4}{3}wx = w(1+\frac{x}{3})$. Caso essa rentabilidade seja de $-1/4$, sua riqueza ficará igual a $w(1-x)+\frac{3}{4}wx = w-\frac{x}{4}$. Desse modo, a utilidade esperada de nossa consumidora será

$$\begin{aligned} U^E(x) &= \frac{1}{2}U\left[w\left(1+\frac{x}{3}\right)\right] + \frac{1}{2}U\left[w\left(1-\frac{x}{4}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{w\left(1+\frac{x}{3}\right)} + \frac{1}{2}\sqrt{w\left(1-\frac{x}{4}\right)} = \frac{\sqrt{w}}{2}\left(\sqrt{1+\frac{x}{3}} + \sqrt{1-\frac{x}{4}}\right) \end{aligned}$$

Ela deve escolher x do modo a maximizar essa função. A primeira derivada dessa função é

$$\frac{dU^E}{dx} = \frac{\sqrt{w}}{2}\left(\frac{\frac{1}{3}}{2\sqrt{1+\frac{x}{3}}} - \frac{\frac{1}{4}}{2\sqrt{1-\frac{x}{4}}}\right)$$

Note que ela é decrescente em relação a x, o que indica que a segunda derivada de U^E em relação a x é negativa, o que garante a condição de máximo de segunda ordem. A condição de máximo de primeira ordem é

$$\frac{dU^E}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{w}}{2}\left(\frac{\frac{1}{3}}{2\sqrt{1+\frac{x}{3}}} - \frac{\frac{1}{4}}{2\sqrt{1-\frac{x}{4}}}\right) = 0$$
$$\frac{1}{9} - \frac{x}{36} = \frac{1}{16} + \frac{x}{48}$$
$$\frac{x}{48} + \frac{x}{36} = \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$$
$$\frac{4x+3x}{144} = \frac{16-9}{144}$$
$$x = 1$$

Portanto, ela deve investir toda sua riqueza no ativo com risco.