Teoria do Consumidor: Equilíbrio do Consumidor

Roberto Guena de Oliveira

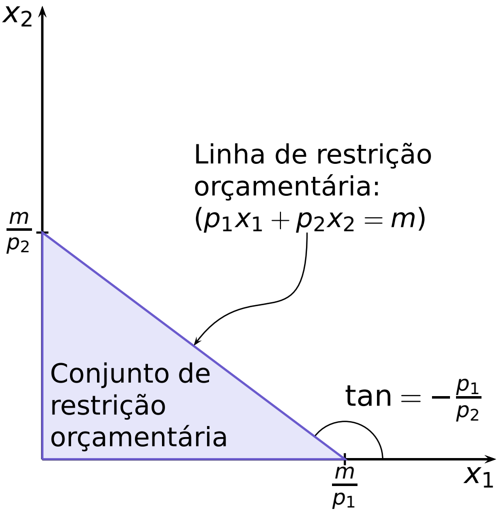
21 de março de 2011

Sumário

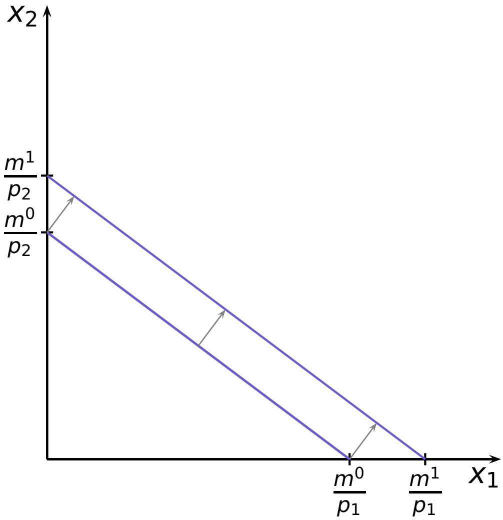
A restrição orçamentária

- Imagine um consumidor que deva escolher quanto consumir de cada bem sujeito à restrição de que ele não pode gastar mais do que sua renda montária m.
- Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ os preços de cada um dos n bens existentes. A cesta de bens a ser escolhida pelo consumidor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ deve satisfazer então à restrição:
$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq m.$$
- O conjunto de cestas de bens que satisfazem a restrição acima é chamado conjunto de restrição orçamentária.
- O conjunto de cestas de bens para as quais $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = m$ é chamado linha de restrição orçamentária.

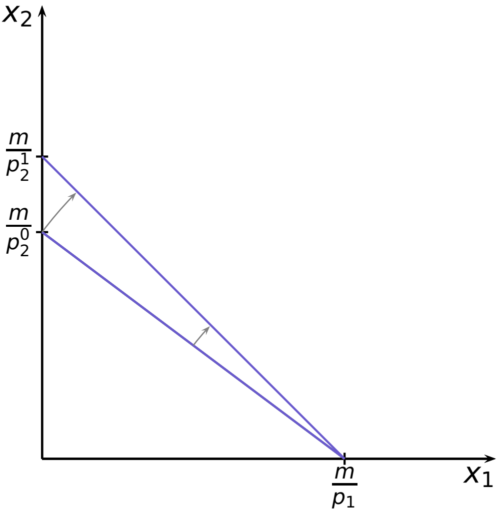
Representação gráfica: 2 bens



Efeito de um aumento na renda



Efeito de uma redução no preço do bem 2



Exercício de fixação

Esboce um gráfico mostrando o que ocorre com a linha de restrição orçamentária caso

a. A renda do consumidor diminua.
b. O preço do bem 2 aumente.
c. O preço do bem 1 diminua.
d. O preço do bem 1 aumente.

Exemplo

Um consumidor com renda igual a \$100 que deve escolher as quantidades a consumir de dois bens. O bem 2 tem preço constante e igual a \$1 por unidade. Para o consumo do bem 1, o consumidor paga um preço igual \$1 para todas as unidades consumidas até um limite de 50 unidades. Caso queira consumir acima desse limite, ele deve pagar um preço igual a \$1 por unidade para as 50 primeiras unidades consumidas e um preço igual a \$2 por unidade para as unidades que excederem o limite de 50 unidades. Esboce a linha de restrição orçamentária desse consumidor.

Exemplo – continuação

Restrição orçamentária para $x_1 \leq 50$:

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

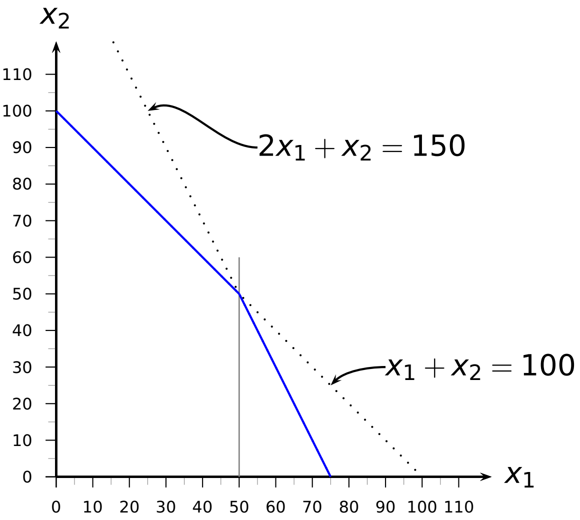
Restrição orçamentária para $x_1 > 50$:

$$50 + 2(x_1 - 50) + x_2 \leq 100$$

Ou ainda,

$$2x_1 + x_2 \leq 150$$

Exemplo – continuação



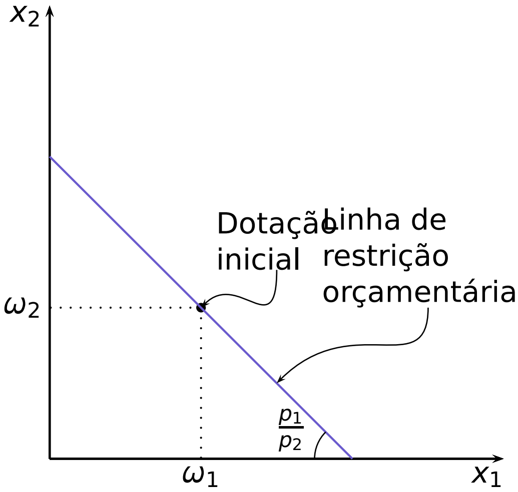
Renda endógena

- No mundo real, a renda monetária de um consumidor típico é afetada pelos preços vigentes.
- Exemplos: salário afeta a renda do trabalhador, preços do bens agrícolas afetam a renda do agricultor . . .
- Uma forma de modelar esse fato, é supor que o consumidor, ao invés de uma renda monetária dada, possui uma dotação inicial de bens.
- Esse consumidor pode vender, aos preços de mercado, alguns desses bens para comprar outros.

Notação

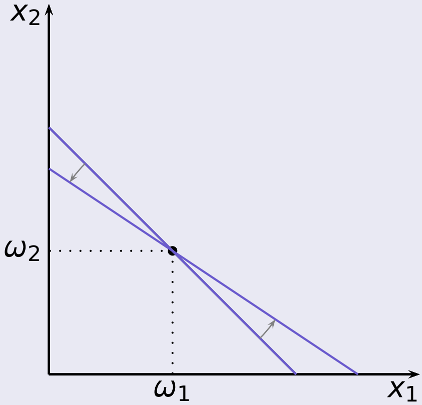
- ω_1 e ω_2: dotações iniciais dos bens 1 e 2, respectivamente.
- p_1 e p_2: preços aos quais o consumidor pode comprar pode comprar ou vender esses bens.
- x_1 e x_2: quantidades consumidas dos bens 1 e 2.
- A restrição orçamentária tem a forma
$$p_1(x_1 - \omega_1) + p_2(x_2 - \omega_2) \leq 0$$
ou ainda
$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq p_1\omega_1 + p_2\omega_2$$
- $m(p_1, p_2) = p_1\omega_1 + p_2\omega_2$ é a renda endógena do consumidor.
- Note que a dotação inicial (ω_1, ω_2) pertence à linha de restrição orçamentária.

Representação gráfica

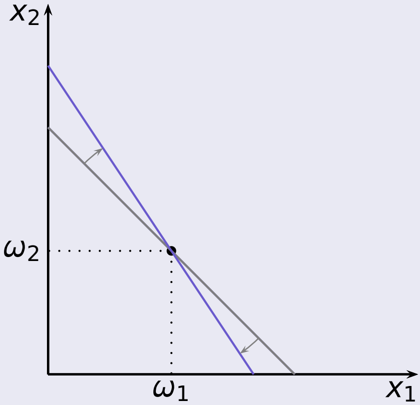


Efeito de variações nos preços

Redução em $\frac{p_1}{p_2}$



Aumento em $\frac{p_1}{p_2}$



O problema da maximização de utilidade

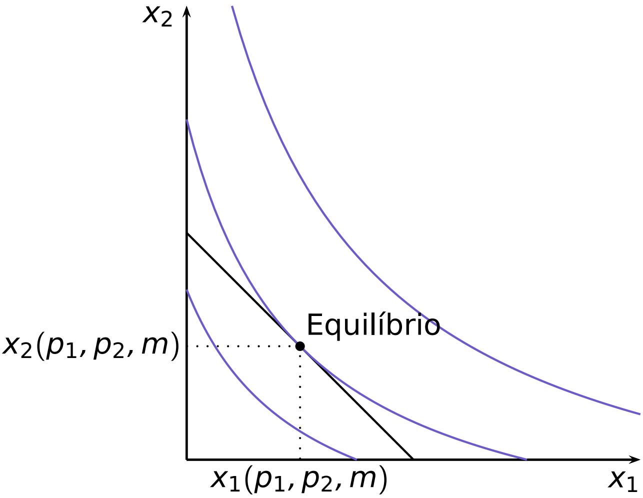
Suporemos que o consumidor sempre escolherá, entre todas as cestas que sua restrição orçamentária permite que ele escolha, a cesta de bens mais preferida ou com maior utilidade. A escolha do consumidor é, portanto a solução para o problema de escolher uma cesta de bens (x_1, x_2) que maximize a função de utilidade

$$U(x_1, x_2)$$

respeitando a restrição orçamentária e as condições de consumo não negativo

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq m,$$
$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

Solução gráfica: solução interior.



Propriedades da solução interior

- Solução sobre a linha de restrição orçamentária (no caso de preferências monotônicas):

$$p_1 x_1(p_1, p_2, m) + p_2 x_2(p_1, p_2, m) = m$$

- Tangência entre a curva de indiferença e a linha de restrição orçamentária:

$$|TMS| = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{ou} \quad \frac{UMg_1}{p_1} = \frac{UMg_2}{p_2} = \lambda$$

λ é utilidade marginal da renda.

Solução pelo método de Lagrange

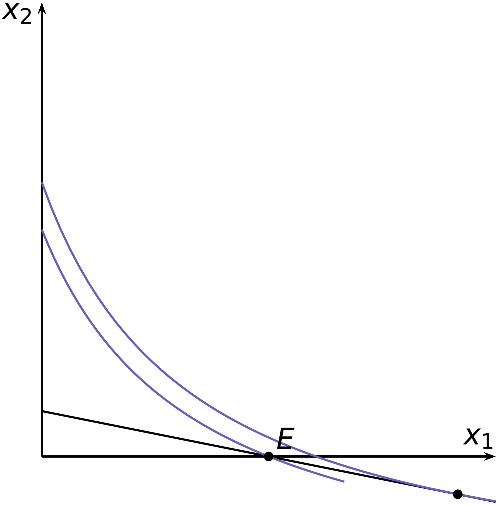
O lagrangeano

$$\mathscr{L} = U(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$$

Condições de máximo de 1ª ordem

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow UMg_1 - \lambda p_1 = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow UMg_2 - \lambda p_2 = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0$$

Solução de canto



Incorporando a possibilidade de solução de canto

O lagrangeano

$$\mathscr{L} = U(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m) + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$$

Condições de 1ª ordem

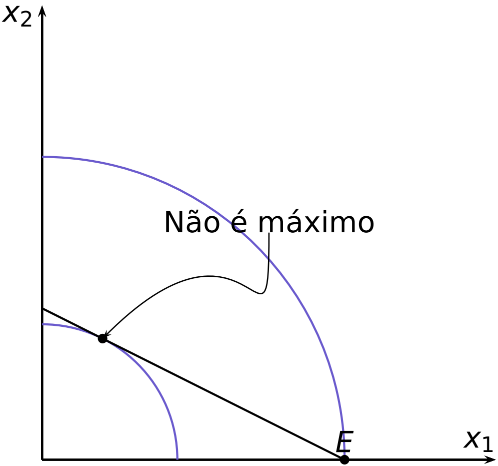
No ponto ótimo, existem $\lambda, \mu_1, \mu_2 ge 0$ tais que

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow UMg_i - \lambda p_i + \mu_i = 0$$

$$\lambda_i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m) = 0$$

$$\mu_i x_i = 0$$

Preferências côncavas



Condição de máximo de 2ª ordem

Condição necessária

$$\begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \\ p_2 & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \geq 0$$

Condição suficiente

$$\begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \\ p_2 & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0$$

A função de demanda marshalliana

Definição

As funções de demanda marshalliana $x_1(p_1, p_2, m)$ e $x_2(p_1, p_2, m)$ são funções que fornecem os valores que resolvem o problema de maximizar a função de utilidade $U(x_1, x_2)$ respeitando as condições.

$$\begin{gathered} p_1x_1 + p_2x_2 \leq m \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

Nota:

Por vezes é conveniente usar a notação $\mathbf{x}(p_1, p_2, m)$ para representar o vetor das funções de demanda, isto é $\mathbf{x}(p_1, p_2, m) = (x_1(p_1, p_2, m), x_2(p_1, p_2, m))$

Preferências Cobb-Douglas

Função de Utilidade

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

Condições de equilíbrio

$$\begin{cases} |TMS| = \dfrac{a}{b}\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m \end{cases}$$

Funções de demanda

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{a}{a+b}\frac{m}{p_1} \quad x_2(p_1, p_2, m) = \frac{b}{a+b}\frac{m}{p_2}$$

Substitutos perfeitos

O problema do consumidor

$$\text{maximizar} \quad U(x_1, x_2) = a\,x_1 + x_2$$

$$\text{dadas as restrições} \begin{cases} p_1\,x_1 + p_2\,x_2 = m \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solução

Da primeira restrição, vem $x_2 = {(m - x_1)}/{p_2}$. Substituindo na função objetivo, o problema passa a ser maximizar

$$\left(a - \frac{p_1}{p_2}\right) x_1 + \frac{m}{p_2}$$

Dadas as restrições $x_1, x_2 \geq 0$

Substitutos perfeitos

continuação

As funções de demanda

$$x_1(p_1, p_2, m) = \begin{cases} \frac{m}{p_1} & \text{caso } a > \frac{p_1}{p_2} \\ 0 & \text{caso } a < \frac{p_1}{p_2} \end{cases}$$

$$x_2(p_1, p_2, m) = \begin{cases} 0 & \text{caso } a > \frac{p_1}{p_2} \\ \frac{m}{p_2} & \text{caso } a < \frac{p_1}{p_2} \end{cases}$$

Caso $a = {}^{p_1}\!/_{p_2}$ teremos

$$(x_1(p_1, p_2, m), x_1(p_1, p_2, m)) = \\ \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ | p_1 x_1 + p_2 x_2 = m\}$$

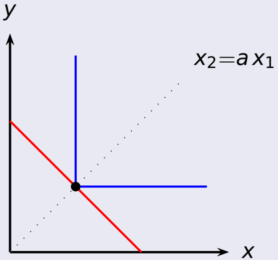
Complementos perfeitos

O problema do consumidor

$$\text{maximizar} \quad U(x_1, x_2) = min(a\,x_1, x_2)$$

$$\text{dadas as restrições} \begin{cases} p_1\,x_1 + p_2\,x_2 = m \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solução



Substituindo $x_2 = a\,x_1$ na restrição orçamentária,

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1 + a\,p_2}$$

$$x_2(p_1, p_2, m) = \frac{a\,m}{p_1 + a\,p_2}$$

Exercício de fixação

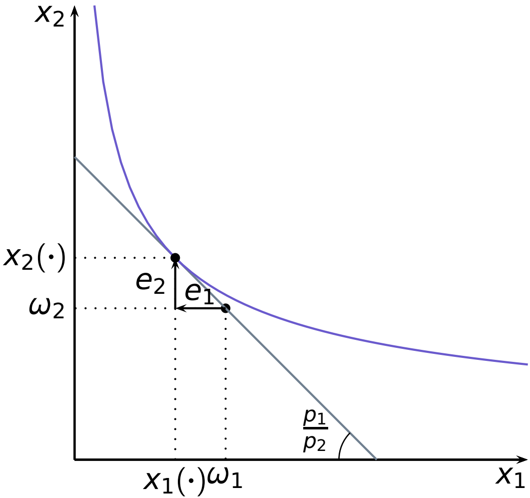
Determine a funções de demanda para cada uma das seguintes funções de utilidade

a. $U(x_1, x_2) = [ax_1^{\rho} + (1-a)x_2^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}$.
b. $U(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$.
c. $U(x_1, x_2) = \min\{x_1 + \frac{x_2}{2}, \frac{x_1}{2} + x_2\}$
d. $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \ln x_2$

Definições

- $x_i(p_1, p_2, p_1\omega_1 + p_2\omega_2)$ é a chamada demanda bruta pelo bem $i \qquad (i = 1, 2)$.
- $e_i(p_1, p_2, \omega_1, \omega_2) = x_i(p_1, p_2, p_1\omega_1 + p_2\omega_2) - \omega_1$ é a chamada demanda líquida pelo bem $i \qquad (i = 1, 2)$.

Representação gráfica



Exercício

Um consumidor possui uma dotação inicial de 5 unidades do bem 1 e 3 unidades do bem 2 suas preferências são representadas pela função de utilidade $U(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$ na qual x_1 e x_2 são as quantidades consumidas dos bens 1 e 2, respectivamente. Supondo que esses dois bens podem ser negociados aos preços p_1 e p_2, determine suas funções de demanda e de demanda líquida desse consumidor por esses bens.