Resolução do exame ANPEC de microeconomia para 2013

Roberto Guena de Oliveira

22 de dezembro de 2013

Questão 1

Considere a função utilidade $U = x_1 x_2$. Assuma que o indivíduo recebe uma renda fixa d e que os preços dos dois bens são p_1 e p_2 .

Julgue as seguintes afirmativas:

0. As curvas de nível dessa função utilidade têm o formato de hipérbóles retangulares.

1. Para qualquer nível de preços dado a quantidade total gasta com x_1 é diferente da quantidade total despendida com x_2 .

2. A relação $p_2 x_2 = p_1 x_1$ mantém-se para todos os pontos da restrição orçamentária.

3. Um aumento percentual na renda induz a um aumento percentual menor no consumo dos dois bens.

4. A função utilidade indireta derivada tem a seguinte forma

$$V(p_1, p_2, d) = \frac{d^2}{4p_1 p_2}.$$

Solução

0. Verdadeiro. Uma curva de nível para essa função de utilidade tem a fórmula $x_1 x_2 = k$ na qual k é uma constante correspondente a um determinado nível de utilidade. Hipérboles retangulares são hipérboles cujas assíntotas são perpendiculares entre si. Como as curvas de indiferença tende assintoticamente aos eixos, caso elas sejam hipérboles retangulares, suas assíntotas

coincidirão com os eixos do plano cartesiano. A fórmula geral de tais hipérboles retangulares cujas assíntotas coincidem com os eixos cartesianos é $x_2 = k/x_1$ ou $x_1 x_2 = k$, o que coincide com a fórmula de nossas curvas de indiferença.

1 Falso. Trata-se de uma função de utilidade Cobb-Douglas. A forma geral dessa função de utilidade é $U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$ na qual α e β são parâmetros positivos. As funções de demanda para essa função são dadas pelas fórmulas

$$x_1(p_1, p_2, d) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{d}{p_1} \tag{1}$$

e

$$x_2(p_1, p_2, d) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{d}{p_2} \tag{2}$$

nas quais p_1 e p_2 são os preços dos bens 1 e 2, respectivamente e d é a renda do consumidor. Multiplicando as equações (1) e (2) por p_1 e p_2, respectivamente, obtemos

$$p_1 x_1(p_1, p_2, d) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} d \tag{3}$$

e

$$p_2 x_2(p_1, p_2, d) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} d. \tag{4}$$

No caso da função de utilidade considerada nessa questão, $\alpha = \beta = 1$, o que significa

$$p_1 x_1 = p_2 x_2 = \frac{d}{2}.$$

Isso significa que o consumidor deverá dispender exatamente metade de sua renda com a aquisição de cada bem.

2 Falso. Essa relação ocorre no ponto de maximização de utilidade. Em outros pontos da linha de restrição orçamentária ela não ocorre. Por exemplo, o ponto $(\frac{d}{p_1}, 0)$ está sobre a linha de restrição orçamentária, mas nele toda a renda é gasta exclusivamente com a aquisição do bem 1.

3 Falso. Como podemos ver nas funções de demanda (1) e (2) as funções de demando dos dois bens são diretamente proporcionais à renda do consumidor. Isso significa que qualquer aumento na renda do consumidor irá provocar o mesmo aumento proporcional no consumo dos dois bens.

4 Verdadeiro. Levando em consideração que $\alpha = \beta = 1$, as funções de demanda (1) e (2) assumem a forma

$$x_1(p_1, p_2, d) = \frac{d}{2p_1}$$

e

$$x_2(p_1, p_2, d) = \frac{d}{2p_2}.$$

Substituindo essas funções na função de utilidade, encontramos a função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, d) = U\left(\frac{d}{2p_1}, \frac{d}{2p_2}\right) = \frac{d}{2p_1} \times \frac{d}{2p_2} = \frac{d^2}{4p_1 p_2}.$$

QUESTÃO 2

Considerando que o axioma fraco da preferência revelada é atendido e que o comportamento do consumidor pode ser captado através de índices de Laspeyres e Paasche, definidos em relação a um período-base e um período t posterior, é correto afirmar que:

(0) Se o índice de quantidade de Laspeyres for menor do que 1, o consumidor está melhor no período t do que no período-base.

(1) Se o índice de quantidade de Paasche foi maior do que 1, o consumidor melhorou no período t em relação ao período-base.

(2) No índice de preços de Laspeyres utilizamos como pesos as quantidades do período-base.

(3) Se o índice de preços de Paasche for menor do que 1, a teoria das preferências reveladas nos diz que o consumidor melhorou no período t em relação ao período-base.

(4) Se o índice de preços de Paasche for maior do que a razão entre o gasto total do consumidor no período t e o gasto total no período-base, o consumidor estava melhor no período-base do que no período t.

Solução

(0) Falso. Notemos por q_i^0 a quantidade consumida do bem i no período base sendo i um índice que varia entre 1 e o número de bens existentes n. De modo similar, notemos por q_i^t a quantidade consumida do bem i no período corrente, por p_i^0 o preço desse bem no período base e por p_1^t o preço desse bem no período corrente. O índice Laspeyres de quantidade é dado por

$$IL_q = \frac{\sum_{i=1}^n q_i^t p_i^0}{\sum_{i=1}^n q_i^0 p_i^0}.$$

Assim, se esse índice é menor do que 1, isso significa que

$$\frac{\sum_{i=1}^n q_i^t p_i^0}{\sum_{i=1}^n q_i^0 p_i^0} < 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n q_i^t p_i^0 < \sum_{i=1}^n q_i^0 p_i^0.$$

Isso significa que a cesta de bens escolhida pelo consumidor no período t custaria para ele, no período base, menos do que a cesta de bens que ele efetivamente escolheu (no período base). Assim, a cesta de bens do período base foi revelada preferida à cesta de bens no período corrente, o que indica que o consumidor estava melhor no período base.

(1) Verdadeiro. O índice de quantidade de Paasche é maior do que 1 caso

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^t p_i^t}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^t} > 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} q_i^t p_i^t > \sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^t.$$

Isso indica que, no período corrente, o consumidor poderia adquirir a cesta de bens que consumiu no período base, mas preferiu consumir outra cesta. Assim, a cesta de bens consumida no período corrente foi revelada preferida à cesta de bens consumida no período base, o que indica que o consumidor está melhor no período corrente.

(2) Verdadeiro. O índice de preço de Laspeyres é dado pela razão entre o valor da cesta de bens consumida no perído corrente a preços do período base dividido pelo valor, também a preços do período base, da cesta de bens consumida no período base.

(3) Falso. Nada podemos dizer acerca da variação bem estar do consumidor com base exclusivamente em informações sobre o índice de preços. Para que se chegue a alguma conclusão sobre a variação no bem estar do consumidor, é necessário comparar o índice de preços com a razão entre a renda (ou gasto do consumidor) no período corrente e a mesma renda (ou gasto) no período base. Caso o índice Laspeyeres de preço seja inferior a essa razão, então podemos concluir que o consumidor está melhor no período corrente. Caso o índice Paasche seja superior a essa variação, podemos concluir que o consumidor estava melhor no período base.

(4) Verdadeiro. Se o índice Paasche de preços é maior do que a razão entre o gasto no período corrente e o gasto no período base, devemos ter

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^t} > \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^t < \sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^0.$$

Isso indica que, quando adquiriu a cesta de bens do período base o consumidor poderia adquirir a cesta de bens do período corrente a um custo menor. Assim, a cesta de bens do período base foi revelada preferida à cesta de bens do período corrente, o que indica que o consumidor estava melhor no período base.

QUESTÃO 3

Suponha que a função de produção para um dado produto tem a seguinte forma funcional: $q = f(x_1) = 2x_1 - 0{,}03x_1^2$. Considere também que o preço de uma unidade do bem final é $p(q) = R\$10{,}00$ e o preço unitário do insumo, praticado pelo mercado, é $p(x_1) = R\$8{,}00$.

Dadas essas informações, é correto afirmar que:

0. O nível de utilização do insumo que maximiza o nível de produção é $x_1 = 33{,}33$.

1. O nível de utilização do insumo que maximiza o lucro da firma é $x_1 = 19{,}5$.

2. O nível de produção economicamente ótimo é $q = 28$.

3. O lucro máximo (π) obtenível pela firma é $\pi(q) = R\$120$.

4. A produtividade marginal do fator é crescente.

Solução

0. Verdadeiro. Basta verificar as condições de máximo de primeira e de segundo ordem. A condição de máximo de primeira ordem requer que

$$\frac{d}{dx_1} f(x_1) = 0 \Rightarrow 2 - 0{,}06x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{100}{3} \approx 33{,}33.$$

A condição de máximo de segunda ordem requer que a segunda derivada da função de produção em relação ao uso do insumo seja negativa. Isso ocorre de fato pois

$$\frac{d^2}{dx_1^2} = -0{,}06.$$

Assim, a função de produção efetivamente atinge o seu valor máximo quando $x_1 = 100/3$.

1. Falso. A firma maximiza seu lucro ao igualar o produto marginal de seu insumo ao preço do mesmo medido em unidades de produto. Isso requer que

$$2 - 0{,}06x_1 = \frac{8}{10} \Rightarrow x_1 = 20.$$

2. Verdadeiro. com se trata de uma empresa tomadora de preço, o nível de produção que maximiza seu lucro é a produção eficiente. Esta pode ser obtida calculando-se o valor da função de produção quando a quantidade do insumo é aquela que maximiza o lucro da empresa, isto é, $x_1 = 20$:

$$f(20) = 2 \times 20 - 0{,}03 \times 20^2 = 28.$$

③ Verdadeiro. Basta calcular o lucro da empresa quando contrada $x_1 = 20$ unidade do fator de produção obtendo 28 unidades do produto:

$$\pi = 28 \times 10 - 20 \times 8 = 120.$$

④ Falso. A produtividade marginal é decrescente, visto que a segunda derivada da função de produção em relação ao uso do fator é negativa.

QUESTÃO 4

Uma firma monopolista atua num mercado no qual a demanda pelo produto pode ser dividida em dois mercados com características distintas, que podem ser resumidas pelo comportamento das respectivas demandas: $q_1^d = 24 - p_1$ e $q_2^d = 24 - 2p_2$. A tecnologia disponível para o monopolista apresenta custo marginal constante e igual a 6.

É possível afirmar que:

(0) O monopolista cobrará o preço mais alto no mercado com a demanda mais elástica.

(1) Se realizar discriminação de preços, o monopolista obterá um lucro aproximadamente 24,2% maior do que se praticar um preço único para os dois mercados.

(2) Com a discriminação de preços, a perda de eficiência no mercado 1, cuja demanda é caracterizada pela função $q_1^d = 24 - p_1$, será de 40,5.

(3) Se o monopolista preferir praticar um preço único nos dois mercados, isso representará uma perda líquida de bem estar menor .

(4) A produção total do monopolista ao realizar discriminação de preços seria de $q_{\text{total}} = 15$, bem maior do que a produção total sem discriminação.

Solução

Para avaliar os itens a seguir precisamos descobrir quanto o monopolista vai produzir, que preço ele vai cobrar, quanto vai vender em cada mercado, qual será o seu lucro e qual será a perda de peso morto do monopólio em dois cenários: no primeiro deles, o monopolista pratica o mesmo preço nos dois mercados e, no segundo, ele diferencia os preços entre os mercados.

Comecemos avaliando o comportamento do monopolista caso ele pratique o mesmo preço nos dois mercados, ou seja, caso tenhamos $p_1 = p_2 = p$. Nesse caso, a demanda total pelo produto do monopolista será

$$q^d = q_1^d + q_2^d = (24 - p) + (24 - 2p) = 48 - 3p.$$

Invertendo essa função de demanda, obtemos

$$p = 16 - \frac{q}{3}.$$

A receita total do monopolista será

$$RT = pq = \left(16 - \frac{q}{3}\right) q = 16q - \frac{q^2}{3}.$$

A receita margianl será
$$RMg = \frac{d}{dq}RT = 16 - \frac{2}{3}q.$$
O monopolista maximiza seu lucro ao igualar receita e custos marginais. Assim, chamando de $\bar{q}$ a quantidade que maximiza o lucro do monopolista quando ele não discrimina preço entre os dois mercados, temos

$$16 - \frac{2}{3}\bar{q} = 6 \Rightarrow \bar{q} = 15.$$

Substituindo essa quantidade na função de demanda inversa encontramos o preço $\bar{p}$ a ser praticado pelo monopolista nesse contexto

$$\bar{p} = 16 - \frac{\bar{q}}{3} = 16 - \frac{15}{3} = 11.$$

Para calcular o lucro, precisaríamos conhecer a função de custo do monopolista. O enunciado do questão só informa que o custo marginal é constante e igual a 6. Como o custo marginal é constante, ele é também igual ao custo variável médio e, portanto, para qualquer quantidade q produzida, o custo variável será igual a $6q$. Como o enunciado não informa se há ou não custo fixo, ficaremos com a hipótese de que este é igual a zero. Nesse caso, o lucro do monopolista será a diferença entre sua receita e seu custo variável. Assim, chamando de $\bar{\pi}$ o lucro do monopolista quando ele não diferencia preços entre os dois mercados, temos

$$\bar{\pi} = \bar{q}\bar{p} - 6\bar{q} = 15 \times 11 - 15 \times 6 = 75.$$

Para calcularmos a perda de peso morto do monopólio, determinemos inicialmente a quantidade $q*$ que ele deveria produzir de modo a gerar o máximo de ganho social. Esta é determinada pela igualdade entre preço de demanda e custo marginal. Assim,
$$16 - \frac{q^*}{3} = 6 \Rightarrow q^* = 30.$$
A perda de peso morto gerada pelo monopólio é dada pela área, calculada entre as quantidades $\bar{q}$ e q^* acima da linha de custo marginal e abaixo da curva de demanda:
$$\overline{DW} = \frac{(11-6)(30-15)}{2} = 37{,}5.$$

Vejamos agora como se comportaria o monopolista caso ele discriminasse preços entre os dois mercados. Nesse caso, as funções de demanda inversas nos mercados 1 e 2 são, respectivamente,

$$p_1 = 24 - q_1$$

e

$$p_2 = 12 - \frac{q_2}{2}.$$

As receitas totais serão

$$RT_1 = 24q_1 - q_1^2$$

e

$$RT_2 = 12q_2 - \frac{q_2^2}{2}.$$

E, portanto, as receitas marginais serão

$$RMg_1 = 24 - 2q_1$$

e

$$RMg_2 = 12 - q_2.$$

Chamemos $\hat{q}_1$ e $\hat{q}_2$ as quantidades vendidas nos mercados 1 e 2, respectivamente, quando o monopolista pratica a discriminação de preços de terceiro grau. Essas quantidades podem ser calcular igualando as receitas marginais de cada mercado ao custo marginal de produção:

$$24 - 2\hat{q}_1 = 6 \Rightarrow \hat{q}_1 = 9$$

e

$$12 - \hat{q}_2 = 6 \Rightarrow \hat{q}_2 = 6.$$

Substituindo essas quantidades nas respectivas funções de demanda inversas obtemos os preços que o monopolista pratica em cada mercado quando discrimina seus preços:

$$\hat{p}_1 = 24 - 9 = 15 \quad \text{e} \quad \hat{p}_2 = 12 - \frac{6}{2} = 9.$$

O lucro do monopolista quando discrimina preço será

$$\hat{\pi} = \hat{p}_1\hat{q}_1 - 6\hat{q}_1 + \hat{p}_2\hat{q}_2 - 6\hat{q}_2 = 15 \times 9 - 6 \times 9 + 9 \times 6 - 6 \times 6 = 99.$$

Para calcular o peso morto do monopolista, calculemos as quantidades eficientes de cada mercado (q_1^* e q_2^*) como as quantidades que seriam demandada caso o produto fosse fendido ao seu custo marginal:

$$q_1^* = 24 - 6 = 18 \quad \text{e} \quad q_2^* = 24 - 2 \times 6 = 12.$$

A perda de peso morto em cada mercado é a área entre a quandidade efetivamente produzida pelo monopolista e a quantidade eficiente acima da curva de custo marginal e abaixo da curva de demanda:

$$\widehat{DW}_1 = \frac{(15-6)(18-9)}{2} = 40{,}5$$

e

$$\widehat{DW}_2 = \frac{(9-6)(12-6)}{2} = 9.$$

De tal sorte que a perda total de peso morto será dada por

$$\widehat{DW} = \widehat{DW}_1 + \widehat{DW}_2 = 49{,}5.$$

0. Falso. Sabemos que o monopolista discriminador de preços de terceiro grau pratica preços mais elevados em mercados cuja demanda é menos elástica. Podemos confirmar essa regra no presente caso. Quando discrimina preços, o preço que o monopolista pratica no mercado 1 é $\hat{p}_1 = 15$ e o preço que ele pratica no mercado 2 é $\hat{p}_2 = 9$. A elasticiade preço da demanda no mercado um nesso pondo é
$$\hat{\epsilon}_1 = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}.$$
Já a elasticidade preço da demanda no mercado 2 é
$$\hat{\epsilon}_2 = -2 \times \frac{9}{6} = -3.$$
Isso confirma que no mercado com demanda menos elástica, o mercado 1, o preço é mais elevado.

1. Anulado. O item foi anulado porque o exercício não provia informação a respeito do custo fixo do monopolista. Se esse fosse igual a zero, o item estaria errado, pois conforme calculamos, quando não discrimina preços o monopolista obtém um lucro igual a $\bar{\pi} = 75$ e, quando discrimina os preços seu lucro passa a $\hat{\pi} = 99$, o que corresponde a um aumento de, aproximadamente, 32%.

2. Verdadeiro. Foi esse o valor que calculamos para $\widehat{DW}$.

3. Verdadeiro. Conforme calculamos, a perda de bem estar, medida em termos de perda de peso morto do monopolista é de $\overline{DW} = 37{,}5$ quando o monopolista não discrimina preço. Essa perda passa a $\widehat{DW} = 49{,}5$ quando ele discrimina.

4. Falso. Conforme calculamos, nos dois casos, o monopolista produz 15 unidades.

QUESTÃO 5

Numa indústria competitiva, todas as empresas usam a mesma tecnologia dada pela função de produção $q = K^{1/6}L^{1/3}$. O insumo L é comercializado também num mercado competitivo ao preço de $p_L = R\$1{,}00$. Já o insumo K é mantido fixo no curto prazo e é comercializado ao preço de $p_k = 1/2$. A demanda de mercado para o produto final é $q^d = 400 - 100p$. Analise as afirmações abaixo:

0. O nível de K que minimiza o custo total de curto prazo é $K = q^2$.

1. Supondo-se que as firmas incorrem num custo fixo igual a 1/6, a produção eficiente para as firmas nesse mercado é igual a $q = 1/4$.

2. O preço de equilíbrio de longo prazo da firma $p = R\$1{,}00$.

3. O nível de produção ótimo das firmas é $q = 400$.

4. Dadas as características desse mercado, o número de firmas ótimo que ele comporta é $n = 900$.

Solução

A questão está mal escrita, pois pode gerar a impressão de que o custo fixo ao qual se refere o item 1 é o custo com a aquisição do insumo K fixo no curto prazo. Para chegarmos às respostas do gabarito, todavia, tal custo fixo deveria ser interpretado como um custo extra mesmo no longo prazo. Por exemplo, as empresas, caso queiram operar, podem precisar pagar um alvará de funcionamento no valor desse custo fixo. Adicionalmente, precisamos considerar o custo fixo citado no item 1 também nos itens 2, 3 e 4.

Com essa interpretação, ficamos com os seguintes dados:

1. A função de produção é dada por $K^{1/6}L^{1/3}$.

2. Os preços dos insumos L e K são, respectivamente $p_L = 1$ e $p_K = 1/2$.

3. A função de demanda é $q^d = 400 = 100p$.

4. Para operar, além dos custos com a aquisição dos insumos K e L, uma empresa deve arcar com um custo igual a 1/6. Ela não arca com esse custo caso não opere.

Com essas informações podemos deduzir as condições de equilíbrio de longo prazo. Primeiramente, as demandas condicionais dos fatores de produção e a função de custo de uma empresa. As demandas condicionais dos fatores de produção são encontradas resolvendo-se para L e K o sistema de equações composto pelas condições de custo mínimo de primeira ordem abaixo:

$$\begin{cases} \dfrac{PMg_K}{PMg_L} = \dfrac{p_K}{p_L} \\ f(K, L) = q \end{cases}$$

nas quais PMg_i é a produtividade marginal do insumo i $(i = k, l)$ e $f(K, L)$ é a função de produção. No caso do presente exercício, como $PMg_k = \frac{\partial}{\partial K}\left(K^{1/6}L^{1/3}\right) = K^{-5/6}L^{1/3}/6$ e $PMg_L = \frac{\partial}{\partial L}\left(K^{1/6}L^{1/3}\right) = K^{1/6}L^{-2/3}/3$ e como $p_L = 1$ e $p_K = 1/2$, tais condições de primeira ordem se traduzem em

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{L}{K} = \dfrac{1}{2} \\ K^{1/6}L^{1/3} = q. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema de equações para K e L encontramos as demandas condicionais de longo prazo para os dois insumos:

$$K(q) = q^2 \tag{5}$$

e

$$L(q) = q^2. \tag{6}$$

Multiplicando (5) e (6), respectivamente, $p_K = 1/2$ e $p_L = 1$ e somando os dois produtos, obtemos o custo com a aquisição dos insumos K e K:

$$p_K K(q) + p_L L(q) = \frac{3}{2}q^2. \tag{7}$$

Finalmente, acrescentando a esse custo um custo quase-fixo $F = 1/6$, ficamos com a seguinte função de custo:

$$c(q) = \begin{cases} \frac{3}{2}q^2 + \frac{1}{6} & \text{caso } q > 0 \\ 0 & \text{caso } q = 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Os custos médio e marginal de produção de longo prazo são, respectivamente,

$$CM(q) = \frac{c(q)}{q} = \frac{3}{2}q + \frac{1}{6q} \tag{9}$$

e

$$CMg(q) = \frac{\partial}{\partial q}c(q) = 3q. \tag{10}$$

No equilíbrio de longo as empresas produzem na escala eficiente mínima, ou seja a quantidade que minimiza o custo médio de produção e o preço de mercado é exatamente igual ao custo médio mínimo. Seja q^* a quantidade que minimiza o custo médio de produção. Essa quantida pode ser obtida ou calculando a condição de custo médio mínimo (primeira derivada em relação a q igual a zero e segunda deriva negativa) ou igualando o custo médio ao custo marginal. Nos dois casos, obtém-se

$$q^* = \frac{1}{3}. \tag{11}$$

O custo médio mínimo de produção é obtido substituindo (11) em (9):

$$CM(q^*) = 1 \tag{12}$$

Este deve ser o preço no equilíbrio de longo prazo. Isso significa que a quantidade demandada será

$$q^d(1) = 400 - 100 \times 1 = 300. \tag{13}$$

Cada empresa irá produzir a quantidade que minimiza o custo médio mínimo, $q^* = 1/3$. Assim, sendo n^* o número de empresas no equilíbrio de longo prazo, a igualdade no equilíbrio entre quantidade ofertada e quantidade demandada requer que

$$n^* \frac{1}{3} = 300 \Rightarrow n^* = 900. \tag{14}$$

0. Verdadeiro. O emprego do insumo fixo que minimiza o custo de curto prazo é o emprego que se faria desse insumo caso ele não fosse fixo, ou seja, sua demanda codicional de longo prazo. Encontramos essa demanda na equação (5) e é exatamente o que prevê a afirmação desse item.

1. Falso. Para qualquer nível fixo de K, a demanda condicional de L de curto prazo é dada por

$$K^{\frac{1}{6}} L^{\frac{1}{3}} = q \Rightarrow L(q,K) = q^3 \sqrt{K}.$$

A função de custo de curto prazo será então dada por

$$c(q, p_K, p_L) = p_K K + p_L q^3 \sqrt{K} + F.$$

Em que F é um eventual custo quase fixo. O custo marginal de curto prazo é

$$\frac{\partial}{\partial q} c(q, p_K, p_L) = 3 p_L q^2 \sqrt{K}.$$

A produção eficiente é aquela que faz com que o custo marginal de produção seja igual ao preço de demanda. A função de demanda inversa é $p = 4 - q^d/100$. Caso haja n empresas todas elas com o mesmo emprego de K, de tal sorte que todas têm a mesma função de custo marginal de curto prazo e, portanto todas devem produzir a mesma quantidade q, devemos ter $q^d = nq$. Substituindo na função de demanda inversa, ficamos com

$p = 4 - nq/100$. Assim, a condição de produção eficiente (igualdade entre o custo marginal de produção das firmas e o preço de demanda) é dada por

$$4 - \frac{nq}{100} = 3p_L q^2 \sqrt{K}.$$

No presente caso, o custo fixo é igual a $p_K K = 1/6$, e como $p_K = 1/2$, $K = 1/3$. Adicionalmente, $p_L = 1$. Assim, a condição de igualdade entre preço de demanda e custo marginal passa a ser

$$4 - \frac{nq}{100} = 3q^2 \sqrt{\frac{1}{6}}.$$

Resolvendo essa equação para q encontraríamos a quantidade eficiente a ser produzida por empresa. Essa solução depende, evidentemente do número de empresas n no mercado. Esse não foi informado. Adicionalmente, como n é necessariamente um número inteiro, o valor de q que resolve essa equação será um número irracional.

(2) Verdadeiro. O preço de equilíbrio de longo prazo corresponde ao custo médio mínimo. De acordo com (12) este é igual a 1.

(3) Falso. O nível ótimo de produção de cada empresa é aquele que minimiza o custo médio de longo prazo. Este, de acordo com (11) é $q^* = 1/3$.

(4) Verdadeiro. Chegamos exatamente a esse número em (14)

QUESTÃO 6

Considere a teoria da produção e indique quais das afirmativas abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

(0) Se a função de produção for $f(K,L) = [K^a + L^a]^{v/a}$, com $a \geq 1$, $a \neq 0$ e $v > 1$, ela apresenta retornos crescentes de escala.

(1) O coeficiente de elasticidade de substituição σ de uma função de produção como $f(K,L) = [K^a + L^a]^{v/a}$, com $a < 1$, $a \neq 0$ e $v > 1$, é $\sigma = 1/(1-a)$.

(2) Funções de produção com elasticidade de substituição $\sigma = 0$ possuem isoquantas em formato de L.

(3) Se a tecnologia for monotônica, isso significa que não é possível produzir ao menos a mesma quantidade aumentando a quantidade de um dos insumos.

(4) Funções de produção do tipo Cobb-Douglas possuem elasticidade de substituição $\sigma = 1$.

Solução

(0) Verdadeiro. Basta verificar que, para qualquer $t > 0$,

$$f(tK, tL) = [(tK)^a + (tL)^a]^{v/a} = t^v [K^a + L^a]^{v/a} = t^v f(K,L).$$

Portanto, essa função de produção é homogênea de grau v e, sendo $v > 1$, ela apresenta rendimentos crescentes de escala.

(1) Verdadeiro. Trata-se de uma função de produção do tipo *CES* e essa é exatamente a fórmula da elasticidade de produção para essa função. Caso você não se lembre disso, pode calcular a elasticidade de substituição. Primeiramente, calcule as produtividades marginais de K e L que são, respectivamente,

$$PMg_K = \frac{\partial}{\partial K} f(K,L) = vK^{a-1}[K^a + L^a]^{v/a-1}$$

e

$$PMg_L = \frac{\partial}{\partial K} f(K,L) = vL^{a-1}[K^a + L^a]^{v/a-1}.$$

Após isso, calcule o módulo da taxa técnica de substituição:

$$|TTS| = \frac{PMg_K}{PMg_L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{a-1} = \left(\frac{L}{K}\right)^{1-a}.$$

Inverta essa função para representar L/K em função da $|TTS|$:

$$\frac{L}{K} = |TTS|^{\frac{1}{1-a}}.$$

Finalmente, calcule a elasticidade de substituição:

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{L}{K}\right)}{d||TTS|} \frac{|TTS|}{\left(\frac{L}{K}\right)} = \frac{1}{1-a}|TTS|^{\frac{1}{1-a}-1} \frac{|TTS|}{\left(\frac{L}{K}\right)} = \frac{1}{1-a}.$$

2 O gabarito dá verdadeiro, mas, a rigor é falso. Costuma-se dizer que uma curva tem formato de L quando ela é um ângulo reto. Assim, por exemplo, uma função de produção com coeficientes fixos possui isoquantas em formato de L. Primeiramente, cabe notar que, de acordo com o modo como usualmente se define elasticidade de substituição, qual seja

$$\sigma = \left.\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d|TST|} \frac{|TST|}{\frac{x_2}{x_1}}\right|_{f(x_1,x_2)=cte.},$$

em que x_2 e x_1 são as quantidade empregadas dos dois insumos de produção, e $f(x_1, x_2$ é a função de produção, esta sequer é definida para funções cuja curva de isoquanta tem formato de L. Isso porque no trecho vertical e no vértice da isoquanta, a TTS não é definida e, no trecho horizontal, ela é constante (igual a zero), de tal sorte que não se pode falar em

$$\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d|TTS|}.$$

A esse comentário, pode-se argumentar, a meu ver com razão, que o conceito econômico de elasticidade de substituição seria melhor capturado com a seguinte definição:

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{x_2(w_1,w_2,y)}{x_a(w_1,w_2,y}\right)}{d\left(\frac{w_1}{w_2}\right)} \frac{\frac{w_1}{w_2}}{\frac{x_1(w_1,w_2)}{x_2(w_1,w_2)}},$$

em que w_1 e w_2 são os preços dos insumos x_1 e x_2, respectivamente e $x_1(w_1, w_2, y)$ e $x_2(w_1, w_2, y)$ são as funções de demanda condicionais desses dois insumos. Nesse sentido, a elasticidade de substituição indica qual é a elasticidade da razão entre o uso dos dois insumos em relação ao preço relativo dos mesmos. Nesse caso, como, considerando-se preços positivos para os dois insumos, para toda função de produção com isoquantas com formato em L, as demandas condicionais dos fatores de produção dependem exclusivamente da quantidade produzida[1] então a razão entre os usos dos dois

[1] As quantidades demandadas de cada insumo são as correspondentes ao vértice da isoquanta associada à quantidade que se pretende produzir.

isumos é constante em relação ao preço relativo dos mesmos, isto é

$$\frac{d\left(\frac{x_2(w_1,w_2,y)}{x_a(w_1,w_2,y}\right)}{d\left(\frac{w_1}{w_2}\right)} \frac{\frac{w_1}{w_2}}{=} 0,$$

o que implica uma elasticidade de substituição igual a zero.

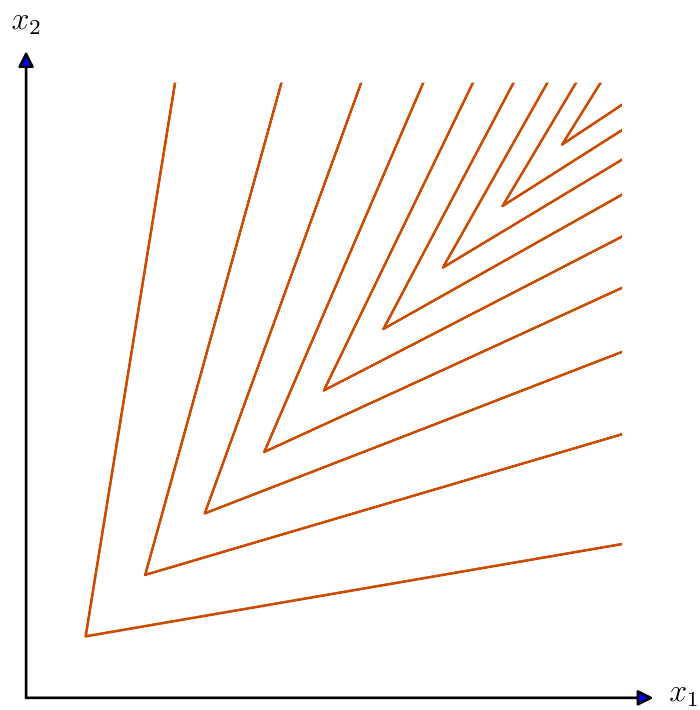

Figura 1: Curvas de isoquanta para a função de produção descrita em 15.

Embora isso seja verdade, não é verdade todas as função de produção com elasticidade de substituição nula tenham isoquantas em formato de L. Considere, para dar um contra-exemplo, a seguinte função de produção:

$$f(x_1, x_2) = a \min\left\{\frac{x_2}{x_1+b}, \frac{x_1}{x_2+b}\right\}, \tag{15}$$

na qual a e b são constantes reais e positivas.[2]

[2]essa função de produção apresenta as seguintes propriedades:

- $f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$;
- se $x_1' > x_1^*$ e $x_2' > x_2^*$, então $f(x_1', x_2') > f(x_1^*, x_2^*$;
- $f(x_1, x_2) < a$ para quaisquer x_1, x_2.

A Figura 1 mostra qual deve ser o formato das curvas de isoquanta para essa função de produção. Elas formam ângulos agudos com os dois lados apresentando inclinação positiva, salvo para o caso da isoquanta que passa pelo origem que forma um ângulo reto. Claramente, quaisquer que sejam os preços (não negativos) dos insumos, para produzir uma determinada quantidade com custo mínimo, a empresa deve operar sobre o vértice de uma curva de isoquanta. Desse modo a demanda condicional dos fatores de produção não se altera em virtude de variações no preço relativos desses fatores de produção e, portanto, essa função de produção também tem elasticidade de substituição igual a zero.

3 Falso. Pelo, contrário, por definição, se a função de utilidade é monotônica, isso significa que, aumentando a quantidade empregada de um dos insumos sempre é possível produzir ao menos a mesma quantidade que era produzida antes desse aumento.

4 Verdadeiro. Essa é uma das propriedades da função de produção Cobb-Douglas. Caso você se esqueça, basta calcular a elasticidade de substituição. É preciso lembrar que a função de produção do tipo Cobb-Douglas é uma função com a forma $f(K,L) = AK^aL^b$ na qual A, a e b são constantes reais positivas. Primeiramente, encontramos as produtividades marginais:

$$PMg_K = \frac{\partial f(K,L)}{\partial K} = Aa\,K^{a-1}L^b$$

e

$$PMg_L = \frac{\partial f(K,L)}{\partial L} = Ab\,K^{a}L^{b-1}.$$

O módulo da taxa técnica de substituição é, então,

$$|TTS| = \frac{PMg_K}{PMg_L} = \frac{a}{b}\frac{L}{K}.$$

Invertendo essa igualdade de modo a deixar L/K em função da $|TTS|$, obtemos

$$\frac{L}{K} = \frac{b}{a}|TTS|.$$

Agora podemos calcular a elasticidade de substituição para essa função:

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{L}{K}\right)}{d|TTS|}\frac{|TTS|}{\frac{L}{K}} = \frac{b}{a}\frac{|TTS|}{\frac{b}{a}|TTS|} = 1.$$

QUESTÃO 7

Em relação à curva de demanda compensada, indique quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

(0) Ela ilustra apenas efeitos substituição.

(1) Sempre pode ser encontrada a partir da diferenciação da função de gasto total do consumidor em relação ao preço do bem.

(2) Ela difere da função de demanda Hicksiana porque esta última não mantém a utilidade constante.

(3) Possui inclinação negativa.

(4) A ambiguidade que resulta dos efeitos renda e substituição atuarem em direções opostas nas curvas de demanda marshallianas não existe nas curvas de demanda compensadas.

Solução

(0) Verdadeiro. Ao longo da curva de demanda compensada, o nível de utilidade é mantido constante. Isso significa que, para qualquer variação de preço, ela mostra a variação na quantidade demandada líquida do efeito renda, isto é, apenas o efeito substituição.

(1) Verdadeiro. O lema de Shephard afirma exatamente isso.

(2) Falso. A curva de demanda compensada é uma curva que descreve o que acontece com a demanda compensada, também conhecida como demanda Hicksiana, para um determinado nível de utilidade, quando o preço do bem varia.

(3) Verdadeiro, segundo o gabarito, mas, a rigor, falso. Sabemos que a curva de demanda compensada jamais tem inclinação positiva. Porém, ela pode ser vertical (inclinação indefinida), como acontece, por exemplo no caso em que há dois bens que o consumidor considera complementares perfeitos, ou horizontal, como acontece quando há dois bens substitutos perfeitos e o preço relativo é exatamente igual à taxa marginal de substituição entre os dois bens.

(4) Verdadeiro. Como não há efeito renda para um deslocamento sobre a curva de demanda compensada, só há o efeito substituição. Isso significa que, sobre a curva de demanda compensada, a variação na quantidade demandada não tem jamais o mesmo sinal que a variação no preço.

QUESTÃO 8

Duas firmas do setor industrial possuem a seguinte função de produção: $q = K^{1/4}L^{3/4}$, em que K representa a quantidade de capital utilizado e L a quantidade de trabalho empregado. Considere que a firma (2) é mais mecanizada do que a outra, de tal forma que $K_1 = 16$ e $K_2 = 625$, temos então $q_1 = 2L_1^{3/4}$ e $q_2 = 5L_2^{3/4}$. Por fim, suponha ainda que a oferta de trabalho disponível para as duas firmas é igual a 100 unidades. Nesse cenário, podemos constatar:

⓪ A alocação do fator trabalho implicaria $L_2 = 97{,}4$ e apenas 2,6 unidades de L na firma 1.

① Dado que a firma 1 possui menor nível de capital, a alocação eficiente de recursos deveria alocar mais trabalho na firma 1.

② Dada a estrutura de capital das duas firmas, a alocação eficiente dos recursos levaria a um nível de produção $q = 179$.

③ Uma alocação igual de trabalho entre as duas firmas renderia um ganho de eficiência e produção.

④ Uma alocação de trabalho $L_1 = 50 = L_2$ levaria a uma produção total de $q = 131{,}6$ unidades.

Solução

⓪ Falso. Na verdade há uma infinidade de alocações possíveis, pois qualquer alocação (L_1, L_2) tal que $L_1 + L_2 \leq 100$ é factível. Talvez a afirmação diga respeito à alocação eficiente. Nesse caso, interpretando que as duas empresas produzem o mesmo bem. o fator trabalho deve ser distribuído entre as duas empresas a igualar sua produtividade marginal nos dois processos produtivos. A produtividade marginal do trabalho na empresa 1 é

$$PMg_1 = \frac{dq_1}{dL_1} = \frac{3}{2\sqrt[4]{L_1}}.$$

Já a produtividade marginal do trabalho na empresa 2 é

$$PMg_2 = \frac{dq_1}{dL} = \frac{15}{4\sqrt[4]{L_2}}.$$

Como a alocação eficiente, além de ser tal que as duas produtividades marginais se igualem, deve alocar toda a oferta de trabalho, ela pode ser obtida resolvendo-se as duas equações a seguir:

$$\begin{cases} \frac{3}{2\sqrt[4]{L_1}} = \frac{15}{4\sqrt[4]{L_2}} \\ L_1 + L_2 = 100 \end{cases}$$

Resolvendo essas duas equações obtemos $L_1 = \frac{1600}{641} \approx 2{,}49$ e $L_2 = \frac{62500}{641} \approx 97{,}51$.

(1) Falso. A alocação eficiente deve alocar o trabalho de modo a maximizar a produção conjunta das duas empresas. O critério para tal é a igualdade entre a produtividade marginal do trabalho na empresa 1 e a produtividade marginal do trabalho na empresa 2. Como a empresa 2 tem mais capital, é necessário alocar mais trabalho nessa empresa para fazer com que ela tenha a mesma produtividade marginal do trabalho que a empresa 1.

(2) Falso. Substituindo as quantidades de trabalho da alocação eficiente encontradas na soluçõa do item 0 nas funções de produção das duas empresas encontramos a quantidade produzida pela empresa 1, $q_1 \approx 16{,}37$, a quantidade produzida pela empresa 2, $q_2 \approx 155{,}14$, e, somando essas duas quantidades o total produzido, $q \approx 171{,}51$.

(3) Falso. Conforme vimos, a alocação eficiente se dá com a empresa 2 empregando mais trabalho.

(4) Verdadeiro. Fazendo nas duas funções de produção $L_1 = L_2 = 50$, obtemos $q_1 = 2\sqrt[4]{50}$, $q_2 = 5\sqrt[4]{50}$ e, portanto, $q = q_1 + q_2 = 7\sqrt[4]{50} \approx 131{,}6$.

QUESTÃO 9

Um pai deseja realizar uma divisão justa de uma pizza com 8 pedaços idênticos entre seus dois filhos. O filho mais novo (1) tem uma função utilidade por pizza definida por $U_1 = 2\sqrt{x_1}$, e o outro filho (2) tem uma função preferência por pizza levemente diferente, dada por $U_2 = \sqrt{x_2}$, em que x_i $(i = 1, 2)$ representa quantidade de pedaços de pizza para o filho 1 e 2, respectivamente. Podemos sustentar que:

0. Um pai utilitarista escolheria dividir a pizza da seguinte forma: $x_1 = 1{,}6$ e $x_2 = 6{,}4$.

1. Um pai que segue os critérios de justiça de John Rawls usaria uma espécie de "véu da ignorância", no qual os filhos optariam por uma escolha de pedaços de pizza que maximizasse o valor esperado de suas utilidades.

2. Um pai igualitário e benevolente distribuiria os pedaços de pizza de tal forma que cada filho obtivesse $x_1 = x_2$.

3. Uma alocação eficiente dos pedaços de pizza seria aquela que iguala a taxa marginal de substituição dos dois filhos.

4. Os dois filhos são avessos ao risco.

Solução

0. Falso. O pai utilitarista deveria escolher x_1 e x_2 de modo a maximizar a soma das funções de utilidade dado $x_1 + x_2 = 8$, ou seja, fazendo $x_2 = 8 - x_1$, escolher x_1 de modo a maximizar $2\sqrt{x_1} + \sqrt{8 - x_1}$. A condição de máximo de primeira ordem é

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{2\sqrt{8 - x_1}} = 0,$$

ou seja,

$$\sqrt{x_1} = 2\sqrt{8 - x_1} \Rightarrow x_1 = 32 - 4x_2 \Rightarrow x_1 = 6{,}4.$$

Como $x_2 = 8 - x_1$, na alocação que maximiza a soma das utilidades, $x_2 = 1{,}6$. Assim, um pai utilitarista, o pai deverá dar 6,4 fatias para o filho 1 e 1,6 fatias para o filho 2.

1. Falso. Mais uma vez, discordamos do gabarito que deu verdadeiro. Embora, Rawls nunca tenha exposto seu critério de justiça em termos de comparação de utilidade ou de utilidade esperada, a interpretação usual que se faz

desse critério é que, para Rawls, "sob o véu da ignorância" os agentes escolheriam uma distribuição econômica que maximizasse o bem estar do menos favorecido. A escolha que maximiza o valor esperado das utilidades é a escolha que maximiza a soma das utilidades. A escolha Rawsiana deveria implicar $U_1 = U_2$, ou seja, $2\sqrt{x_1} = \sqrt{8 - x_1}$, o que implica $x_1 = 1{,}6$ e $x_2 = 6{,}4$.

(2) A frase está incompreensível. O que significa um pai "igualitário e benevolente"? Se o pai é igualitário por que deseja dar consumo igual a seus filhos, a afirmação seria verdadeira. Se o pai é igualitário porque deseja dar a mesma utilidade para seus filhos, a afirmação é falsa, pois, se fizermos $x_1 = x_2 = 4$, a utilidade do filho 1 seria $U_1 = 2\sqrt{4} = 4$ e a utilidade do filho 2 seria $U_2 = \sqrt{4} = 2$. Deixe itens como esse sem responder. O gabarito dá Falso.

(3) Um outro item muito complicado. Não é possível falar em taxa marginal de substituição se a função de utilidade depende apenas do consumo de um bem — fatias de pizza. Adicionalmente, suponha que haja outro bem e que a questão diz respeito, portanto, a outras preferências que não as descritas no enunciado da mesma. Nesse caso, não podemos garantir que alocações nas quais há igualdade entre as taxas marginais de substituição são eficientes e que nas alocações eficientes as taxas marginais de substituição são iguais. Por exemplo, se as preferências dos dois irmãos forem côncavas, toda alocação com consumo positivo dos dois ou mais bens com igualdade entre as taxas marginais de substituição dos dois irmãos será ineficiente e toda alocação eficiente será uma alocação de canto na qual, salvo possivelmente o caso em que todos os bens são inteiramente alocados para um irmão, as taxas marginais de substituição não se igualam. Desse modo, a rigor, o item está errado. Porém, o gabarito dá verdadeiro. Minha sugestão para um item assim confuso: deixe sem resposta.

(4) Verdadeiro. Para chegar a essa conclusão, é preciso interpretar que as funções de utilidade são funções de Von Neumman-Morgenstern (o enunciado não deixa isso claro). Nesse caso, como elas são côncavas, os filhos são avessos ao risco.

QUESTÃO 10

Com relação ao mercado de fatores, indique quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

(0) A demanda de um setor por determinado insumo é a soma horizontal das demandas desse insumo por todas as empresas do setor.

(1) A curva de oferta de trabalho pode apresentar um trecho com inclinação negativa se o efeito-renda associado a uma remuneração mais elevada for maior que o efeito-substituição.

(2) Quando o comprador de um insumo tem poder de monopsônio, a curva de despesa marginal se situa abaixo da curva de despesa média.

(3) Para um monopolista o produto da receita marginal será sempre menor do que o valor do produto marginal.

(4) Se um monopolista *upstream* vender um fator de produção para um monopolista *downstream*, o preço final do produto será afetado por um *mark-up* duplo.

Solução

(0) Verdadeiro. A quantidade demandada de um insumo por parte das empresas de um setor nada mais é do que a soma das quantidades demandas por empresa individual. Graficamente, isso significa que, para obter a curva de demanda pelo insumo do setor, basta fazer a soma horizontal das curvas de demanda individuais.

(1) Verdadeiro. Uma elevação na remuneração do trabalho aumenta o valor da dotação inicial do trabalhador. Se o lazer for um bem normal, esse aumento de valor tende a fazer com que o trabalhador queira consumir mais lazer. Esse efeito é conhecido como efeito renda dotação. Por outro lado, o aumento na remuneração do trabalho aumenta o custo de oportunidade o que tende a fazer com que o consumidor tenda a substituir lazer por outros bens, tanto em virtude do efeito substituição quanto em virtude do efeito renda normal. O efeito total sobre a demanda de lazer dependerá de que efeito prevalecerá. Caso o efeito renda dotação prevaleça, haverá um aumento no consumo de lazer e, consequentemente na oferta de trabalho.

(2) Falso. A despesa total com a aquisição de um insumo é dada por $D = x\,w(x)$, em que D é a dispesa com a aquisição do insumo, x a quantidade adquirida

do insumo por parte de seu único comprador e $w(x)$ o preço de oferta desse produto. A despesa marginal é

$$DMg = \frac{d}{dx}[x\,w(x)] = w(x) + x\frac{d\,w(x)}{dx}.$$

Desde que a oferta do insumo seja positivamente inclinada, $d\,w(x)/dx > 0$. Isso implica $DMg(x) > w(x)$, ou seja, como $w(x)$ é a despesa média, a curva de despesa marginal está acima da curva de despesa média.

3. Verdadeiro. O assim traduzido "produto da receita marginal" de um insumo é dado por *RMgPMg* sendo que *RMg* é a receita marginal do monopolista e *PMg* é o produto marginal do insumo. Já o valor do produto marginal do insumo é $p\,PMg$ em que p é o preço de demanda do produto. Como para o monopolista a receita marginal é inferior ao preço de demanda, $RMg < p$, concluímos que o "produto da receita marginal" é inferior ao valor do produto marginal.

4. Verdadeiro. Essa é a principal conclusão do modelo de monopólio *upstream* e monopólio *downstrem*.

Questão 11

Considere o jogo abaixo e responda se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas:

		Jogador 2	
		x	y
Jogador 1	a	$30, 0$	$30, 2$
	b	$-20, 0$	$100, 2$

(0) As estratégias a e y são estritamente dominantes para os jogadores 1 e 2, respectivamente.

(1) A combinação de estratégias (b, y) é um Equilíbrio de Nash.

(2) Há múltiplos Equilíbrios de Nash.

(3) Todo Equilíbrio de Nash é um ótimo de Pareto.

(4) A combinação de estratégias (a, x) é um Equilíbrio de Nash não-estrito.

Solução

(0) Falso. Uma estratégia estritamente dominante é uma estratégia que é a única melhor resposta para qualquer uma das estratégias que podem ser escolhidas pelo(s) outro(s) jogador(es). No caso do jogo em questão, embora a seja a melhor resposta para y. Apenas a estratégia y é uma estratégia dominante para o jogador 2 visto que y dá resultado superior a x para esse jogador quer o jogador 1 escolha a quer ele escolha b.

(1) Verdadeiro. Um equilíbrio de Nash é uma combinação de estratégias tal que nenhum jogador é capaz de melhorar o seu payoff mudando exclusivamente sua estratégia. Se o jogador 1 escolhe b e o jogador 2 escolhe y, o jogador 1 ganha um payoff de 100, superior ao que ganharia caso tivesse escolhido a. Similarmente, se o jogador 1 escolhe b e o jogador 2 escolhe y, o jogador 2 ganha um payoff de 2 que é superior ao payoff 0 que ele receberia caso escolhesse x.

(2) Falso. Apenas (b, y) configura um equilíbrio de Nash.

(3) Verdadeiro para esse jogo, embora não para qualquer jogo. Um ótimo de Pareto é atingido quando não é possível melhorar a situação de um agente sem, com isso, piorar a situação de outro. No presente jogo, há apenas um

equilíbrio de Nash, qual seja (b, y). Como não há qualquer outro resultado nesse jogo na qual um dos agentes esteja melhor, quando os jogadores jogam (a, b), não é possível melhorar a situação de um sem piorar a situação do outro.

4 Falso. Conforme argumentamos, há apenas um equilíbrio de Nash nesse jogo, qual seja (a, b).

Questão 12

Considere o jogo bi-matriz abaixo:

	C	NC
C	$3,3$	$0,6$
NC	$6,0$	$1,1$

⓪ O Equilíbrio de Nash único é cada jogador escolher (NC,NC) e obter um ganho de 1.

① Se o jogo for repetido infinitamente há um Equilíbrio de Nash perfeito em Subjogos que levaria cada jogador a obter o seu maior payoff médio.

② Se o jogo for repetido um número finito de vezes o resultado cooperativo pode ser alcançado e todos ganhariam um *payoff* de 3 em cada repetição.

③ A estratégia NC é estratégia dominante para os dois jogadores.

④ Suponha que os jogadores não saibam quando o jogo vai acabar e que os dois tenham uma crença comum de que a cada repetição do jogo a probabilidade de que ele vai continuar até N (N igual ao número de repetições) é de $p = 2/3$. Nesse caso, o ganho de jogar sempre C é menor do que o ganho de desviar em $N + 1$.

Solução

⓪ Verdadeiro. Como *NC* é estratégia dominante para os dois jogadores. O único equilíbrio de Nash desse jogo ocorre quando os dois escolhem suas estratégias dominantes.

① Trata-se de uma frase incompreensível: o que significa "o maior *payoff* médio" de um jogador no presente contexto? Esse é um item para ser deixado em branco. Todavia, tentando justificar o gabarito, que deu falso, podemos dizer que, caso o jogo seja repetido indefinidamente é impossível que se tenha um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos em que o *payoff* médio de cada jogador seja igual ao seu maior *payoff* que é 6. De fato, para que um jogador tenha em uma rodada um payoff igual a 6, é necessário que o outro jogador tenha payoff igual a zero, o que torna impossível que, para qualquer história possível desse jogo com repetição, incluindo equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos, os dois jogadores tenham *payoff* médio igual a 6.

(2) Falso. Trata-se de um jogo do tipo dilema dos prisioneiros no qual C é a estratégia cooperativa e *NC* é a estratégia não cooperativa. *NC* é estratégia dominante para o jogo jogado uma única vez. Se o jogo for jogado um número finito de vezes, sabemos que, na última rodada, será estratégia dominante para os dois jogadores escolher *NC*, independentemente do que tehna ocorrido nas rodadas anteriores, visto que não há como o outro jogador punir a estratégia não cooperativas nas próximas rodadas, uma vez que elas não existem. Mas isso significa que os jogadores não têm como punir um eventual comportamento não cooperativo na penúltima rodada, pois o resultado da última rodada será (NC, NC), independentemente de como eles joguem a penúltima rodada. Assim, eles não têm por quê não escolher a estratégia dominante *NC*. Pelo mesmo argumento, visto que o resultado da penúltima rodada será (NC, NC) independentemente do que os jogadores façam na anti-penúltima rodada, cada jogador não tem por que não escolher *NC* também nesse rodada. Se repetirmos esse raciocínio até a primeira rodada, fica claro, que os dois jogadores deverão sempre escolher a estratégia não cooperativa, o que fará com que o payoff de cada jogador em cada repetição do jogo seja igual a 1.

(3) Verdadeiro. Caso em qualquer jogo um jogador tenha uma estratégia que seja a melhor escolha desse jogador quaisquer que sejam as estratégias adotadas pelos outros jogadores, diz-se que essa estratégia é dominante. No presente jogo *NC* é estratégia dominante para os dois jogaodres pois, caso o outro jogador escolha C, ao *NC* o nosso jogador ganha 6 que é mais do que o payoff de 3 ganharia ao escolher C, e caso o outro jogador escolha *NC*, nosso jogador consegue 1 escolhendo *NC* e teria *payoff* de zero caso escolhesse C.

(4) Falso. Novamente a frase está bastante confusa. Talvez o examinador quisesse apenas dizer que a cada repetição do jogo, cada jogador acredite que haverá uma próxima repetição com probabilidade de 2/3. Nesse caso, podemos ver sob que condições há um equilíbrio de Nash perfeito de subjogos quando os dois jogadores adotam a estratégia de escolher C na primeira repetição do jogo e, nas outras repetições, escolher C se, e apenas se, o outro jogador tenha jogado C até então e, caso contrário, escolher *NC*. Nesse caso, essas estratégias configurarão um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos caso a cada rodada, o *payoff* descontado esperado de se manter essa estratégia seja maior do que o payoff esperado de se desviar dela. Seja δ o fator de desconto de um determinado jogador. Seu *payoff* descontado esperado caso ele jogue a estratégia acima descrita, dado que o outro jogador também fará a mesma coisa é, então

$$3+\frac{2}{3}\delta 3+\frac{2}{3}\delta 3+\left(\frac{2}{3}\delta\right)^2 3+\left(\frac{2}{3}\delta\right)^2 3+\cdots=\frac{3}{1-\frac{2}{3}\delta}=\frac{9}{3-2\delta}.$$

Caso ele deixe de jogar essa estratégia e escolha não cooperar, o valor presente de seu *payoff* esperado para a ser

$$6+\frac{2}{3}\delta+\frac{2}{3}\delta+\left(\frac{2}{3}\delta\right)^2+\left(\frac{2}{3}\delta\right)^2+\cdots=5+\frac{1}{1-\frac{2}{3}\delta}=5+\frac{3}{3-2\delta}.$$

Assim, a condição para que haja o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos com os dois jogadores adotando a estratégia acima descrita é

$$\frac{9}{3-2\delta}\geq 5+\frac{3}{3-2\delta}\Rightarrow \delta\geq\frac{9}{10}.$$

Assim, desde que os dois jogadores tenham um fator de desconto maior ou igual a 0,9. Haverá um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos no qual é melhor para os dois jogadores escolherem, a cada rodada, a estratégia C.

Questão 13

Seja um modelo de Cournot com 44 empresas, em que a função demanda do mercado seja dada por: $Q = 400 - 2q_i$ (sendo q_i a produção de cada uma das 44 empresas). Seja o custo total de cada empresa expresso pela função $C_i = 40q_i$. Quanto cada empresa produzirá em equilíbrio?

Solução

A questão deveria ser anulada, visto que a função de demanda de mercado do enunciado não faz sentido. Para se chegar à resposta do gabarito, é preciso supor a seguinte função de demanda:

$$P = 400 - 2Q$$

na qual P é o preço de demanda e Q é a soma dos produtos das 44 empresas. Notemos por q_i o produto da empresa i, $i = 1, \ldots, 44$. No equilíbrio de Cournot, uma empresa qualquer j ($j = 1, \ldots, 44$) produz a quantidade q_j que maximiza seu lucro dadas quantidades produzidas pelas outras empresas. O lucro π_j dessa empresa é

$$\pi_j = Pq_j - 40q_j = \left(400 - 2\sum_{i=1}^{44} q_i\right) q_j - 40q_j.$$

Para que q_j maximize o lucro dessa empresa, é preciso que

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow 360 - 2q_j - 2\sum_{i=1}^{44} q_i = 0 \Rightarrow q_j = 180 - \sum_{i=1}^{44} q_i.$$

Visto que, no equilíbrio de Cournot, a condição acima deve valer para $j = 1, 2, \ldots, 44$, temos

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_{44} = 180 - \sum_{i=1}^{44} q_i = q$$

e

$$\sum_{i=1}^{44} q_i = 44q.$$

Substituindo na condição de primeira ordem, obtmos,

$$q = 180 - 44q \Rightarrow q = 4.$$

Questão 14

Considere um cartel entre duas empresas. Diz-se que uma empresa coopera com o cartel quando restringe sua produção para aumentar os lucros do cartel, e diz-se que uma empresa não coopera quando ela mantém sua produção ao nível determinado pela solução de Cournot, ainda que a outra empresa coopere e restrinja a sua produção. Suponha que o lucro de uma delas quando não coopera e a outra empresa coopera é de $ 1.600, que o lucro da empresa quando ambas cooperam com o cartel é de $ 1.400, e que o lucro de cada uma das empresas se ambas não cooperarem é de $ 1.200. Expresse em percentual o valor mínimo do fator de desconto para promover o sucesso do cartel, se ambas as empresas adotarem a estratégia gatilho.

Solução

Se uma empresa adota a estratégia do gatilho, o valor presente da outra empresa quando adota a mesma estratégia, o que faz com que as duas cooperem indefinidamente, é

$$VP^* = 1400 + 1400\delta + 1400\delta^2 + \cdots = 1400\frac{1}{1-\delta},$$

sendo δ o fator de desconto empregado no cálculo desse valor presente.

Caso a outra empresa opte por desviar do cartel, seu valor presente passa a ser

$$1600 + 1200\delta + 1200\delta^2 + \cdots = 400 + 1200\frac{1}{1-\delta}.$$

A condição para que o cartel seja estável é que o primeiro desse valores presentes seja maior ou igual ao segundo, isto é,

$$1400\frac{1}{1-\delta} \geq 400 + 1200\frac{1}{1-\delta}.$$

Resolvendo essa condição encontramos

$$\delta = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Questão 15

Considere um mundo com duas mercadorias, no qual as preferências dos consumidores podem ser expressas pela equação $U(X_1, X_2) = (10X_1)^{1/2} + X_2$, em que (X_1, X_2) representa a quantidade consumida das duas mercadorias. Sabendo que os preços das mercadorias são, respectivamente, $P(X_1) = 2{,}5$ e $P(X_2) = 8$, diga qual o impacto sobre o bem estar de uma elevação do preço da mercadoria X_1 para $P(X_1) = 5$.

Solução

Trata-se de uma função de utilidade quase-linear na qual a taxa marginal de substituição depende exclusivamente do consumo do bem 1, visto que a utilidade marginal do bem 2 é constante e igual a 1. Nesse caso, a demanda pelo bem 1 independe da renda do consumidor, ao menos se supusermos que sua renda seja elevada o bastante para que ele consuma quantidades positivas dos dois bens, e pode ser obtida simplesmente igualando o módulo da taxa marginal de substituição ao preço relativo, conforme se segue:

$$\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{X_1}} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow X_1 = \frac{5}{2}\frac{p_2^2}{p_1^2}.$$

Como a questão não é clara sobre em que medida o bem estar deve ser calculado, podemos usar as medidas convencionais de variação compensatória e variação equivalente, que no caso dessa função de demanda com efeito renda igual a zero, têm o mesmo valor que é dado pela integral da função de demanda (que no caso, por se tratarem de preferências quase-lineares coincide com a demanda compensada) entre os preços final e inicial. Assim, denotando por ΔW a variação de bem-estar do consumidor, teremos

$$\Delta W = \int_5^{2,5} \frac{5}{2}\frac{p_2^2}{p_1^2}\, d p_1 = \int_5^{2,5} \frac{5}{2}\frac{64}{p_1^2}\, d p_1 = 160 \int_5^{2,5} p_1^{-2}\, d p_1 = 160 \left[-\frac{1}{p_1}\right]_5^{2,5} = -32.$$

O sinal negativo indica que com a elevação no preço do bem 1 houve uma perda de bem estar. Todavia, como na folha de respostas não é possível inserir um valor negativo, podemos responder com o valor absoluto na variação de bem estar, ou seja 32.