Parte II – Teoria da Firma

Produção

Roberto Guena de Oliveira

17 de abril de 2017

USP

Sumário

O conjunto e a função de produção

O conjunto de produção

Plano de produção
Um plano de produção é uma combinação de determinadas quantidades de insumos ou fatores de produção com determinadas quantidades de produtos.

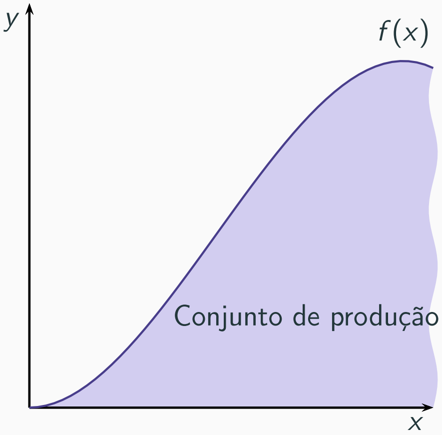
Conjunto de produção
O conjunto de produção é o conjunto de planos de produção tecnologicamente factíveis.

Função de produção

No caso de uma empresa com apenas um produto e n insumos podemos definir uma função $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ que retorna a quantidade máxima de produto que uma empresa pode obter dados o emprego que ela faz dos n fatores de produção:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Representação gráfica: um insumo



Duas hipóteses usuais

Convexidade

O conjunto de produção é convexo, ou, equivalentemente, a função de produção é côncava, ou seja, para quaisquer $0 \leq \alpha \leq 1$ e $x_1^0, x_2^0, x_1^1, x_2^1 \geq 0$,

$$\begin{aligned} & f\left(\alpha x_1^0 + (1-\alpha)x_1^1, \alpha x_2^0 + (1-\alpha)x_2^1\right) \\ & \qquad \geq \alpha f\left(x_1^0, x_2^0\right) + (1-\alpha) f\left(x_1^1, x_2^1\right) \end{aligned}$$

Livre Descarte ou *Free Disposal*

A função de produção é não decrescente em relação ao emprego dos fatores de produção.

Produtiv.

Sumário

Produtividade média e produtividade marginal

Produtividade média do fator *i* (PM_i)

$$PM_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_i}$$

Produtividade marginal do fator de produção *i* (PMg_i)

$$PMg_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i}$$

- $PMg_i \approx$ aumento no produto caso uma unidade adicional do fator i seja contratada.
- produtividade média = produto médio = rendimento médio.
- produtividade marginal= produto marginal = rendimento marginal.

Curto Prazo

Sumário

Longo Prazo

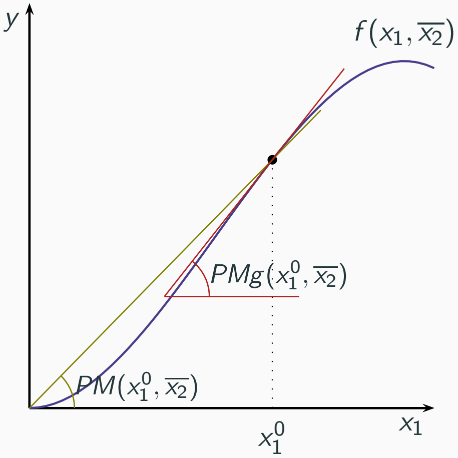
Definimos por longo prazo o horizonte de tempo para o qual a empresa é capaz de ajustar o emprego de todos seus fatores de produção.

Curto Prazo

No curto prazo, a empresa é incapaz de mudar o emprego de alguns fatores de produção. Tais fatores são chamados fatores fixos de produção. Os outros fatores são chamados fatores de produção variáveis. No caso de apenas dois fatores de produção, supondo que o fator fixo é o fator x_2 ($x_2 = \overline{x_2}$), função de produção pode ser expressa por

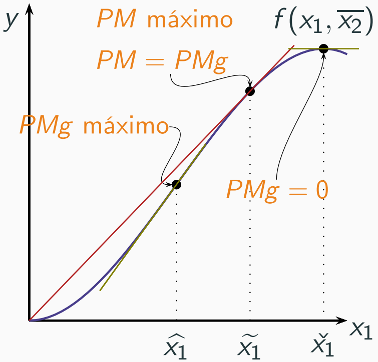
$$f_c(x_1) = f(x_1, \overline{x_2})$$

Função de produção de curto prazo: rep. gráfica

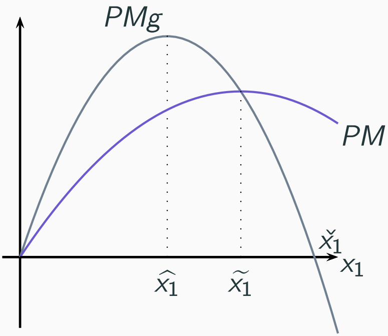


Pontos notáveis

Função de produção



Medidas de produtividade



Produto médio máximo

$$\frac{\partial PM(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial \frac{f(x_1,x_2)}{x_1}}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{x_1 \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} - f(x_1, x_2)}{x_1^2} = 0$$

$$\frac{PMg(x_1, x_2) - PM(x_1, x_2)}{x_1} = 0$$

PM **na origem quando** $f(0, x_2) = 0$

$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{f(x_1, x_2)}{x_1} = \lim_{x_1 \to 0} \frac{f(x_1, x_2) - f(0, x_2)}{x_1 - 0} = PMg_1(0, x_2)$$

“Lei” dos rendimentos marginais decrescentes

Enunciado

Desde que empregado em quantidade suficientemente elevada, cada fator de produção terá produtividade marginal decrescente em relação ao seu emprego.

Exemplo

Dado $x_2 = \overline{x_2}$, existe x_1' tal que

$$\frac{\partial^2 f(x_1, \overline{x_2})}{\partial x_1^2} < 0 \text{ para qualquer } x_1 > x_1'$$

Longo Prazo

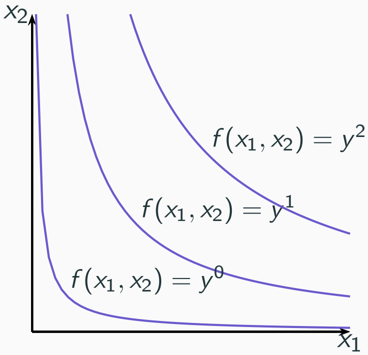
Sumário

definição

Uma curva de isoquanta associada a uma quantidade $y^0 \geq 0$ de produto é o conjunto das combinações entre x_1 e x_2 tais que $f(x_1, x_2) = y^0$, ou seja, o conjunto

$$\{(x_1, x_2) \geq 0 : f(x_1, x_2) = y^0\}$$

Representação gráfica



Taxa Marginal de Substituição Técnica

Definição:

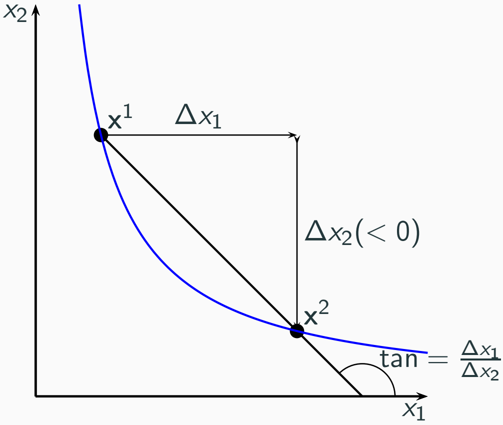
A taxa marginal de substituição técnica ($TMST$) entre os bens 1 e 2 é definida por

$$TMST(x_1, x_2) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\bigg|_{f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2)=f(x_1,x_2)}$$
$$= \frac{dx_2}{dx_1}\bigg|_{dy=0}$$

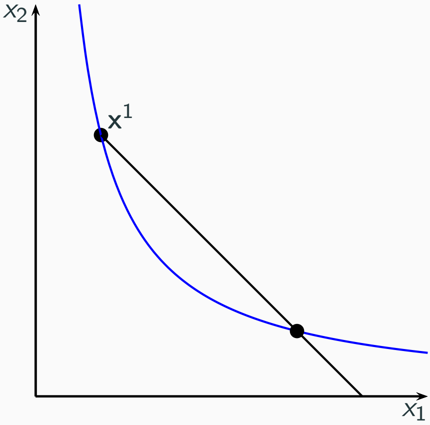
TMST e produtividades marginais

Não é difícil mostrar que

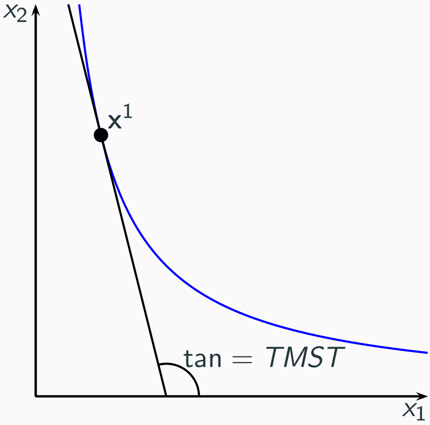
$$TMST = -\frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2} = -\frac{PMg_1}{PMg_2}.$$


x_2
$\mathbf{x}^1$
Δx_1
$\Delta x_2 (< 0)$
$\mathbf{x}^2$
$\tan = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$
x_1

TMST – Interpretação gráfica



TMS – Interpretação gráfica



4 exemplos:

1. $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ (função de produção Cobb-Douglas).

$$TMST = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1}$$

2. $f(x_1, x_2) = g\left(\min\{x_1, ax_2\}\right)$ (complementos perfeitos na produção)

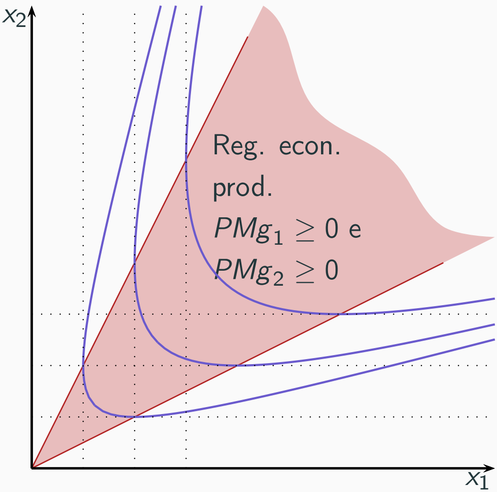
$$TMST = \begin{cases} 0 & \text{caso } x_1 > ax_2 \\ \text{indefinida} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

4 exemplos (continuação):

3. $f(x_1, x_2) = g(ax_1 + x_2)$ (substitutos perfeitos na produção)
$$TMST = -a$$

4. $f(x_1, x_2) = A\left[ax_1^{\rho} + (1-a)x_2^{\rho}\right]^{\frac{\gamma}{\rho}}$, $0 < a < 1$ e $A > 0$, (função de produção CES)
$$TMST = -\frac{a}{1-a}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho}$$

Região econômica de produção



Rendimentos constantes de escala

Definição

Uma função de produção $f(x_1, x_2)$ apresenta rendimentos constantes de escala caso para quaisquer $t, x_1^*, x_2^* > 0$

$$f(tx_1^*, tx_2^*) = tf(x_1^*, x_2^*)$$

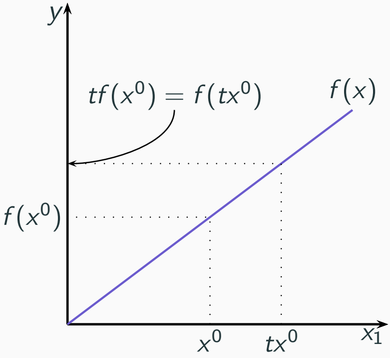
Definição alternativa, mas equivalente.

Uma função de produção $f(x_1, x_2)$ apresenta rendimentos constantes de escala caso para quaisquer $t, x_1^*, x_2^* > 0$, com $t \neq 1$

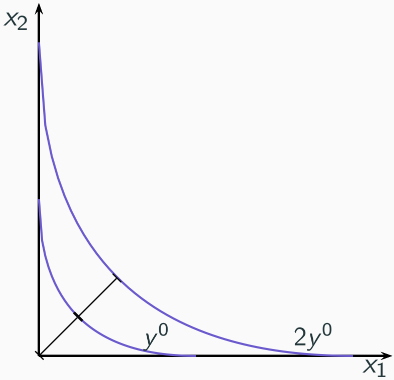
$$\frac{f(tx_1^*, tx_2^*) - f(x_1^*, x_2^*)}{tf(x_1^*, x_2^*) - f(x_1^*, x_2^*)} = 1$$

Rendimentos constantes de escala: 1 fator de produção

1 fator de produção



2 fatores de produção



Rendimentos crescentes de escala

Definição

Uma função de produção $f(x_1, x_2)$ apresenta rendimentos crescentes de escala caso para quaisquer $x_1^*, x_2^* > 0$, $t > 1$ e $0 < u < 1$

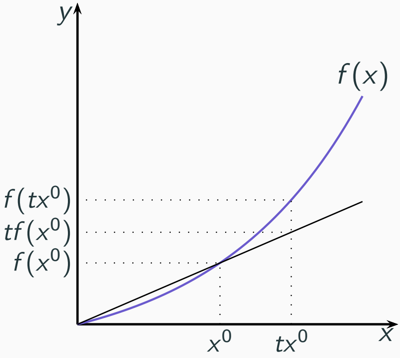
$$f(tx_1^*, tx_2^*) > tf(x_1^*, x_2^*) \quad \text{e} \quad f(ux_1^*, ux_2^*) < uf(x_1^*, x_2^*)$$

Definição alternativa, mas equivalente. Uma função de produção $f(x_1, x_2)$ apresenta rendimentos crescentes de escala caso para quaisquer $t, x_1^*, x_2^* > 0$, com $t \neq 1$

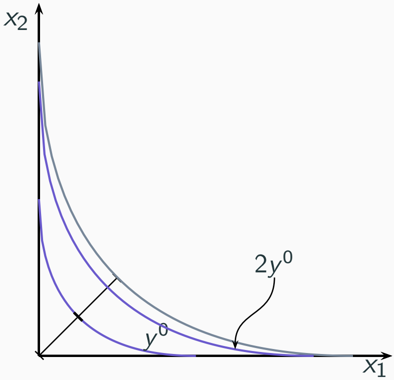
$$\frac{f(tx_1^*, tx_2^*) - f(x_1^*, x_2^*)}{tf(x_1^*, x_2^*) - f(x_1^*, x_2^*)} > 1$$

Rendimentos crescentes de escala: ilustração gráfica

1 fator de produção



2 fatores de produção



Definição

Uma função de produção $f(x_1, x_2)$ apresenta rendimentos decrescentes de escala caso para quaisquer $x_1^*, x_2^* > 0$, $t > 1$ e $0 < u < 1$

$$f(tx_1^*, tx_2^*) < tf(x_1^*, x_2^*) \quad \text{e} \quad f(ux_1^*, ux_2^*) > uf(x_1^*, x_2^*)$$

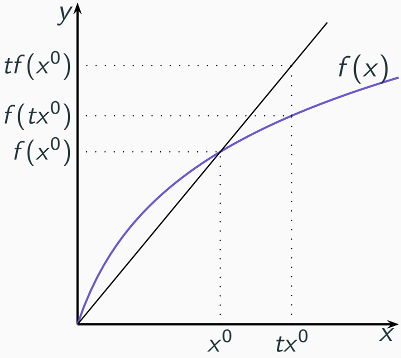
Definição alternativa, mas equivalente.

Uma função de produção $f(x_1, x_2)$ apresenta rendimentos decrescentes de escala caso para quaisquer $t, x_1^*, x_2^* > 0$, com $t \neq 1$

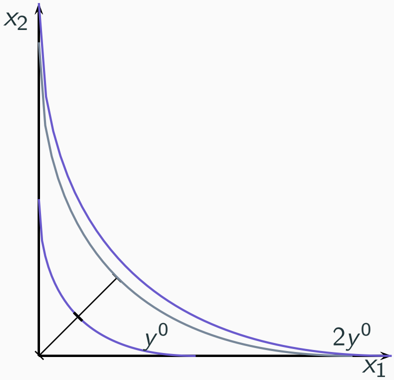
$$\frac{f(tx_1^*, tx_2^*) - f(x_1^*, x_2^*)}{tf(x_1^*, x_2^*) - f(x_1^*, x_2^*)} < 1$$

Rendimentos decrescentes de escala: 1 fator de produção

1 fator de produção



2 fatores de produção



Definição

Uma função de produção $f(x_1, x_2)$ é homogênea de grau k caso, para qualquer $t > 0$ e quaisquer x_1, x_2 tenhamos

$$f(t\,x_1, t\,x_2) = t^k f(x_1, x_2).$$

Homogeneidade e rendimentos de escala

Se uma função de produção é homogênea de grau k, então ela exibirá retornos crescentes de escala caso $k > 1$, retornos constantes de escala caso $k = 1$ e retornos decrescentes de escala caso $k < 1$.

Exemplo: Função de prod. Cobb-Douglas

$$f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

$$f(t\,x_1, t\,x_2) = (t\,x_1)^a (t\,x_2)^b = t^{a+b} x_1^a x_2^b = t^{a+b} f(x_1, x_2)$$

A função de produção Cobb-Douglas é homogênea de grau $a + b$ e exibirá rendimentos crescentes, constantes ou decrescentes de escala caso, respectivamente, $a + b > 1$, $a + b = 1$ ou $a + b < 1$.

Função de produção CES

$$f(x_1, x_2) = A\left[ax_1^{\rho} + (1-a)x_2^{\rho}\right]^{\frac{\gamma}{\rho}}$$

$$\begin{aligned}
f(t\,x_1, t\,x_2) &= A\left[a(t\,x_1)^{\rho} + (1-a)(t\,x_2)^{\rho}\right]^{\frac{\gamma}{\rho}} \\
&= A\left[a\,t^{\rho}x_1^{\rho} + (1-a)t^{\rho}x_2^{\rho}\right]^{\frac{\gamma}{\rho}} \\
&= A\left\{t^{\rho}\left[ax_1^{\rho} + (1-a)x_2^{\rho}\right]\right\}^{\frac{\gamma}{\rho}} \\
&= t\,t^{\gamma}A\left[ax_1^{\rho} + (1-a)x_2^{\rho}\right]^{\frac{\gamma}{\rho}} \\
&= t^{\gamma}f(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

A função de produção CES é homogênea de grau γ.

O Teorema de Euler

Se uma função de produção $f(x_1, x_2)$ é homogênea de grau k então

$$x_1 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = kf(x_1, x_2),$$

ou, em termos de produtos marginais,

$$x_1 PMg_1 + x_2 PMg_2 = kf(x_1, x_2).$$

Ou, em termos de produtos médios e marginais,

$$\frac{PMg_1}{PM_1} + \frac{PMg_2}{PM_2} = k$$

O Teorema de Euler em elasticidades

Note que

$$\frac{PMg_i}{PM_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2) \times \frac{x_i}{f(x_1, x_2)} = \phi_i$$

em que ϕ_i é a elasticidade do produto em relação ao emprego do insumo i.

Assim, podemos reenunciar o teorema de Euler como: se uma função $f(x_1, x_2)$ é homogênea de grau k, então,

$$\phi_1 + \phi_2 = k.$$

Uma medida local para rendimentos de escala

A função de produção $f(x_1, x_2)$ apresenta rendimentos crescentes, constantes ou descrescentes de escala em um determinado ponto caso

$$\lim_{t \to 1} \frac{f(tx_1, tx_2) - f(x_1, x_2)}{tf(x_1, x_2) - f(x_1, x_2)} = \lim_{t \to 1} \frac{f(tx_1, tx_2) - f(x_1, x_2)}{(t-1)f(x_1, x_2)}$$

seja, respectivamente maior, igual ou menor do que zero.

Uma medida local para rendimentos de escala (continuação)

Aplicando o teorema de l'Hopital,

$$\lim_{t\to 1} \frac{f(tx_1, tx_2) - f(x_1, x_2)}{(t-1)f(x_1, x_2)} = \lim_{t\to 1} \frac{\frac{d}{dt}\left[f(tx_1, tx_2) - f(x_1, x_2)\right]}{\frac{d}{dt}\left[(t-1)f(x_1, x_2)\right]}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{tx_1 \frac{\partial f(tx_1, tx_2)}{\partial x_1} + tx_2 \frac{\partial f(tx_1, tx_2)}{\partial x_2}}{f(x_1, x_2)} = \frac{x_1 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}}{f(x_1, x_2)}$$

$$= \frac{PMg_1}{PM_1} + \frac{PMg_2}{PM_2} = \phi_1 + \phi_2$$

Exercícios

Sumário

Questão 6 — ANPEC 2017

Com relação à Teoria da Produção no curto prazo, indique quais entre as afirmações abaixo são verdadeiras

0. O produto marginal é zero quando o volume produzido é máximo; V
1. O produto médio é decrescente quando o produto marginal é maior do que o produto médio; F
2. O produto marginal deve ser igual ao produto médio quando este último é máximo; V
3. A lei dos rendimentos marginais decrescentes resulta da queda na qualidade de unidades adicionais do insumo variável; F
4. Avanços tecnológicos anulam a operação da lei dos rendimentos marginais decrescentes F.

Questão 5 — ANPEC 2016

Em relação à teoria da produção, é correta afirmar que:

0. A elasticidade de substituição para uma função de produção $Q = AL^a K^b$ é a/b. F
1. Uma função de produção do tipo $Q = (L^p + K^p)^{1/p}$, com $p > 0$, apresenta no limite uma taxa marginal de substituição igual a $-K/L$, quando p tende a zero; V
2. Quando a função de produção da empresa consegue produzir mais do que antes, com a quantidade de insumos na mesma proporção, diz-se que ela experimentou progresso técnico neutro (difere do gabarito); F

Questão 5 — ANPEC 2016

Em relação à teoria da produção, é correta afirmar que:

3. Uma função de produção do tipo $Q = (L^p + K^p)^{1/p}$, com p>0, no limite tende a uma Cobb-Douglas, quando p tende a zero; V
4. Uma função de produção do tipo $Q = (L^p + K^p)^{1/p}$, com p>0, apresenta uma elasticidade de substituição infinita, quando $p = 1$. V.

Questão 7 — ANPEC 2015

Com relação à Teoria da Produção, indique quais das afirmativas abaixo são verdadeiras:

0. A produtividade da mão de obra pode aumentar se houver progresso técnico, mesmo que o processo produtivo apresente rendimentos marginais decrescentes. V
1. Quando o processo produtivo apresenta retornos constantes de escala, se a produção aumentar proporcionalmente, o espaço entre as isoquantas aumenta progressivamente. F

Questão 7 — ANPEC 2015

Com relação à Teoria da Produção, indique quais das afirmativas abaixo são verdadeiras:

0. Uma isoquanta nunca pode apresentar uma inclinação ascendente, se todos os insumos apresentam produtividades marginais positivas. V
1. As isoquantas são convexas se a taxa marginal de substituição técnica for decrescente. V

ANPEC 2014 — Questão 05

Suponha que a tecologia de produção do bem Y é dada por

$$f(K, L) = 600K^2L^2 - K^3L^3,$$

supondo que a quantidade disponível do insumo K é igual a 10 unidades. Nessas circunstâncias, podemos afirmar:

0. O ponto de produção máxima ocorre quando o nível de utilização do fator L é igual a 40 unidades; V
1. A produtividade marginal do L é decrescente; F
2. No ponto de produto médio máximo temos o ponto de produção maxima; F

Suponha que a tecologia de proudção do bem Y é dada por

$$f(K, L) = 600K^2L^2 - K^3L^3,$$

supondo que a quantidade disponível do insumo K é igual a 10 unidades. Nessas circunstâncias, podemos afirmar:

3. O nível de produção máxima do bem Y alcançável é $q_y^* = 32$;F
4. O produto médio máximo ocorre quando empregamos $L = 38$ unidades. F