Função de utilidade indireta

Minimização de gastos e funções de dispêndio e demanda compensada

Função de utilidade indireta

A função de utilidade indireta (V) é definida por

$$V(\mathbf{p}, m) = U(\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, m))$$

Exemplo: preferências Cobb-Douglas

Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

Função de demanda:

$$(x_1^*(p_1, p_2, m), x_2^*(p_1, p_2, m)) = \left(\frac{a}{a+b}\frac{m}{p_1}, \frac{b}{a+b}\frac{m}{p_2}\right)$$

Exemplo: preferências Cobb-Douglas

Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

Função de demanda:

$$(x_1^*(p_1, p_2, m), x_2^*(p_1, p_2, m)) = \left(\frac{a}{a+b} \frac{m}{p_1}, \frac{b}{a+b} \frac{m}{p_2} \right)$$

Função de utilidade indireta:

$$V(p_1, p_2, m) = \left(\frac{a}{a+b} \frac{m}{p_1} \right)^a \left(\frac{b}{a+b} \frac{m}{p_2} \right)^b$$

Exemplo: preferências Cobb-Douglas

Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

Função de demanda:

$$(x_1^*(p_1, p_2, m), x_2^*(p_1, p_2, m)) = \left(\frac{a}{a+b} \frac{m}{p_1}, \frac{b}{a+b} \frac{m}{p_2} \right)$$

Função de utilidade indireta:

$$\begin{aligned} V(p_1, p_2, m) = \left(\frac{a}{a+b} \frac{m}{p_1} \right)^a \left(\frac{b}{a+b} \frac{m}{p_2} \right)^b \\ = \left(\frac{a}{p_1} \right)^a \left(\frac{b}{p_2} \right)^b \left(\frac{m}{a+b} \right)^{a+b} \end{aligned}$$

Exemplo: substitutos perfeitos

Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = ax_1 + x_2$$

Exemplo: substitutos perfeitos

Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = ax_1 + x_2$$

Função de demanda:

$$\mathbf{x}^*(p_1, p_2, m) = \begin{cases} \left\{\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)\right\} & \text{caso } p_1 < ap_2 \\ \{(x_1, x_2) : p_1x_1 + p_2x_2 = m\} & \text{caso } p_1 = ap_2 \\ \left\{\left(0, \frac{m}{p_2}\right)\right\} & \text{caso } p_1 > ap_2 \end{cases}$$

Exemplo: substitutos perfeitos

Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = ax_1 + x_2$$

Função de demanda:

$$\mathbf{x}^*(p_1, p_2, m) = \begin{cases} \left\{\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)\right\} & \text{caso } p_1 < ap_2 \\ \{(x_1, x_2) : p_1x_1 + p_2x_2 = m\} & \text{caso } p_1 = ap_2 \\ \left\{\left(0, \frac{m}{p_2}\right)\right\} & \text{caso } p_1 > ap_2 \end{cases}$$

Função de utilidade indireta:

$$V(p_1, p_2, m) = \begin{cases} a\frac{m}{p_1} & \text{caso } p_1 < ap_2 \\ & \\ & \end{cases}$$

Exemplo: substitutos perfeitos

Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = ax_1 + x_2$$

Função de demanda:

$$\mathbf{x}^*(p_1, p_2, m) = \begin{cases} \left\{\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)\right\} & \text{caso } p_1 < ap_2 \\ \{(x_1, x_2) : p_1x_1 + p_2x_2 = m\} & \text{caso } p_1 = ap_2 \\ \left\{\left(0, \frac{m}{p_2}\right)\right\} & \text{caso } p_1 > ap_2 \end{cases}$$

Função de utilidade indireta:

$$V(p_1, p_2, m) = \begin{cases} a\frac{m}{p_1} & \text{caso } p_1 < ap_2 \\ a\frac{m}{p_1} = \frac{m}{p_2} & \text{caso } p_1 = ap_2 \\ & \end{cases}$$

Exemplo: substitutos perfeitos

Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = ax_1 + x_2$$

Função de demanda:

$$\mathbf{x}^*(p_1, p_2, m) = \begin{cases} \left\{ \left(\frac{m}{p_1}, 0 \right) \right\} & \text{caso } p_1 < ap_2 \\ \{(x_1, x_2) : p_1 x_1 + p_2 x_2 = m\} & \text{caso } p_1 = ap_2 \\ \left\{ \left(0, \frac{m}{p_2} \right) \right\} & \text{caso } p_1 > ap_2 \end{cases}$$

Função de utilidade indireta:

$$V(p_1, p_2, m) = \begin{cases} a\frac{m}{p_1} & \text{caso } p_1 < ap_2 \\ a\frac{m}{p_1} = \frac{m}{p_2} & \text{caso } p_1 = ap_2 \\ \frac{m}{p_2} & \text{caso } p_1 > ap_2 \end{cases}$$

Exemplo: substitutos perfeitos

Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = ax_1 + x_2$$

Função de demanda:

$$\mathbf{x}^*(p_1, p_2, m) = \begin{cases} \left\{ \left(\frac{m}{p_1}, 0 \right) \right\} & \text{caso } p_1 < ap_2 \\ \{(x_1, x_2) : p_1 x_1 + p_2 x_2 = m\} & \text{caso } p_1 = ap_2 \\ \left\{ \left(0, \frac{m}{p_2} \right) \right\} & \text{caso } p_1 > ap_2 \end{cases}$$

Função de utilidade indireta:

$$V(p_1, p_2, m) = \left. \begin{cases} a\frac{m}{p_1} & \text{caso } p_1 < ap_2 \\ a\frac{m}{p_1} = \frac{m}{p_2} & \text{caso } p_1 = ap_2 \\ \frac{m}{p_2} & \text{caso } p_1 > ap_2 \end{cases} \right| = \frac{am}{\min\{p_1, ap_2\}}.$$

Exemplo: complementares perfeitos

Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = \min\{ax_1, x_2\}$$

Função de demanda:

$$\mathbf{x}^*(p_1, p_2, m) = \left(\frac{m}{p_1 + ap_2}, \frac{am}{p_1 + ap_2}\right)$$

Exemplo: complementares perfeitos

Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = \min\{ax_1, x_2\}$$

Função de demanda:

$$\mathbf{x}^*(p_1, p_2, m) = \left(\frac{m}{p_1 + ap_2}, \frac{am}{p_1 + ap_2}\right)$$

Função de utilidade indireta:

$$V(p_1, p_2, m) = \min\left\{a\frac{m}{p_1 + ap_2}, \frac{am}{p_1 + ap_2}\right\}$$

Exemplo: complementares perfeitos

Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = \min\{ax_1, x_2\}$$

Função de demanda:

$$\mathbf{x}^*(p_1, p_2, m) = \left(\frac{m}{p_1 + ap_2}, \frac{am}{p_1 + ap_2}\right)$$

Função de utilidade indireta:

$$V(p_1, p_2, m) = \min\left\{a\frac{m}{p_1 + ap_2}, \frac{am}{p_1 + ap_2}\right\} = \frac{m}{p_1 + ap_2}.$$

Algumas propriedades da função de utilidade indireta

Homogênea de grau zero;

Algumas propriedades da função de utilidade indireta

Homogênea de grau zero;

não decrescente em relação à renda;

Algumas propriedades da função de utilidade indireta

Homogênea de grau zero;

não decrescente em relação à renda;

não crescente em relação aos preços;

quase convexa: quaisquer $\mathbf{p}^0 > 0$, $\mathbf{m}^0 > 0$, $\mathbf{p}^1 > 0$, $\mathbf{m}^1 > 0$ e $0 < \alpha < 1$, se $V(\mathbf{p}^0, m^0) \geq V(\mathbf{p}^1, m^1)$, então

$$V\left[\alpha\mathbf{p}^0 + (1-\alpha)\mathbf{p}^1, \alpha m^0 + (1-\alpha)m^1\right] \leq V(\mathbf{p}^0, m^0);$$

Algumas propriedades da função de utilidade indireta

Homogênea de grau zero;

não decrescente em relação à renda;

não crescente em relação aos preços;

quase convexa: quaisquer $\mathbf{p}^0 > 0$, $\mathbf{m}^0 > 0$, $\mathbf{p}^1 > 0$, $\mathbf{m}^1 > 0$ e $0 < \alpha < 1$, se $V(\mathbf{p}^0, m^0) \geq V(\mathbf{p}^1, m^1)$, então

$$V\left[\alpha \mathbf{p}^0 + (1-\alpha)\mathbf{p}^1, \alpha m^0 + (1-\alpha) m^1\right] \leq V(\mathbf{p}^0, m^0);$$

se ela for diferenciável,

$$x_i^*(\mathbf{p}, \mathbf{m}) = -\frac{\frac{\partial V(\mathbf{p}, m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial V(\mathbf{p}, m)}{\partial m}} \quad \text{(Identidade de Roy)}$$

Identidade de Roy e quase convexidade

Considere $\hat{\mathbf{p}} \gg 0$ e $\hat{m}$ quaisquer.

Identidade de Roy e quase convexidade

Considere $\hat{\mathbf{p}} \gg 0$ e $\hat{m}$ quaisquer.

Denote $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*(\hat{\mathbf{p}}, \hat{m})$ de sorte que $V(\hat{\mathbf{p}}, \hat{m}) = U(\hat{\mathbf{x}})$.

Identidade de Roy e quase convexidade

Considere $\hat{\mathbf{p}} \gg 0$ e $\hat{m}$ quaisquer.

Denote $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*(\hat{\mathbf{p}}, \hat{m})$ de sorte que $V(\hat{\mathbf{p}}, \hat{m}) = U(\hat{\mathbf{x}})$.

Para qualquer outro vetor de preços $\mathbf{p} \gg 0$, se a renda for dada por $m = \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}$, $V(\mathbf{p}, m) \geq U(\hat{\mathbf{x}} = V\,(\hat{\mathbf{p}}, \hat{m}))$.

Identidade de Roy e quase convexidade

Considere $\hat{\mathbf{p}} \gg 0$ e $\hat{m}$ quaisquer.

Denote $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*(\hat{\mathbf{p}}, \hat{m})$ de sorte que $V(\hat{\mathbf{p}}, \hat{m}) = U(\hat{\mathbf{x}})$.

Para qualquer outro vetor de preços $\mathbf{p} \gg 0$, se a renda for dada por $m = \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}$, $V(\mathbf{p}, m) \geq U(\hat{\mathbf{x}} = V\left(\hat{\mathbf{p}}, \hat{m}\right))$.

Assim, $\hat{\mathbf{p}}$ resolve o problema de minimizar $V(\mathbf{p}, m)$ dada a restrição $m = \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}$.

O lagrangeano desse problema é

$$\mathscr{L} = V(\mathbf{p}, m) - \lambda\left(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}} - m\right)$$

Identidade de Roy e quase convexidade (continuação)

As condições de mínimo de primeira ordem devem ser verificadas para $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}$:

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\mathscr{L} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial p_i} V(\hat{\mathbf{p}}, m) + \lambda \hat{x}_i = 0, \quad \text{para } i = 1, \ldots, L$$

e

$$\frac{\partial}{\partial m}\mathscr{L} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial m} V(\hat{\mathbf{p}}, m) - \lambda = 0$$

Combinando as duas, obtemos

$$\mathbf{x}^*(\hat{\mathbf{p}}, \hat{m}) = \hat{\mathbf{x}} = -\frac{\frac{\partial V(\hat{\mathbf{p}}, \hat{m})}{\partial p_i}}{\frac{\partial V(\hat{\mathbf{p}}, \hat{m})}{\partial m}}$$

Identidade de Roy e quase convexidade (continuação)

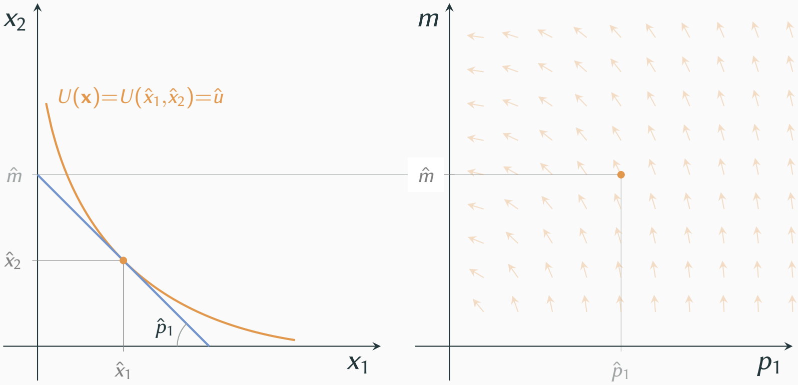
A condição de mínimo de segunda ordem também deve ser atendida em $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}$.

Esta requer, que a função objetivo, $V(\mathbf{p}, m)$ seja localmete quase-convexa no ponto $\hat{\mathbf{p}}, \hat{m}$.

Como esse resultado é válido para quaisquer $\hat{\mathbf{p}} \gg 0$ e $m > 0$, a função de utilidade indireta é globalmente quase convexa.

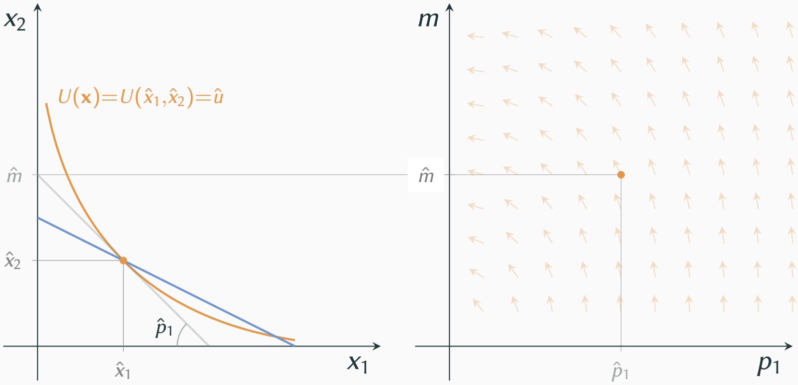
Note que a quase convexidade da função de utilidade indireta não depende de qualquer hipótese de convexidade da função de utilidade.

Identidade de Roy: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



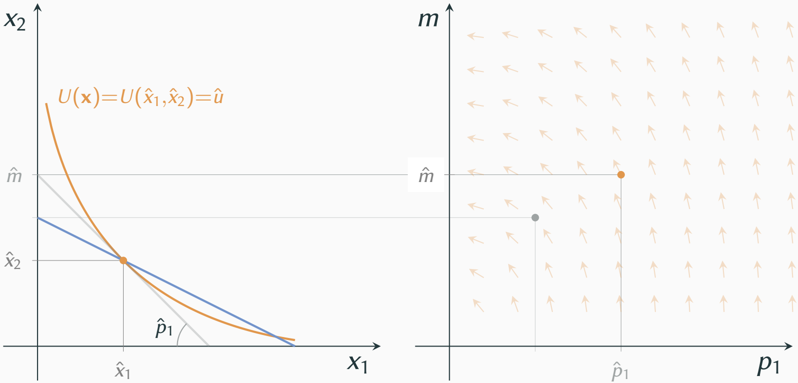
.

Identidade de Roy: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



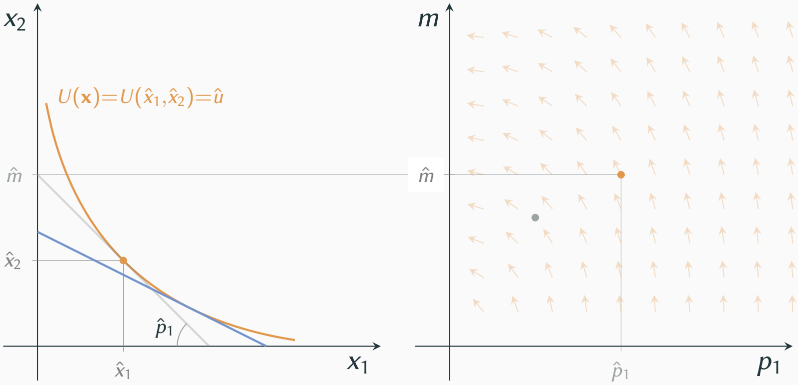
.

Identidade de Roy: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



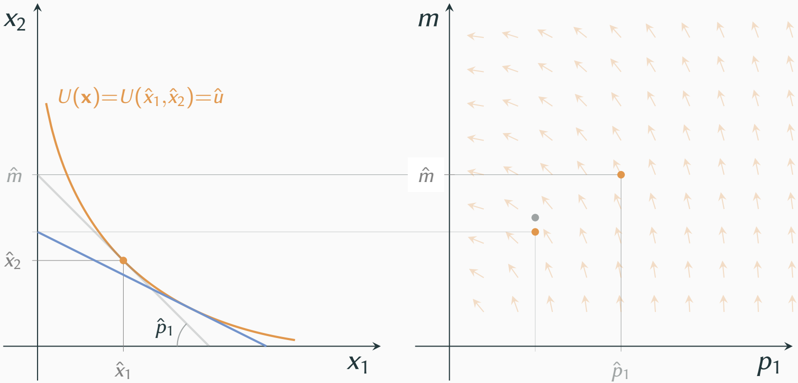
.

Identidade de Roy: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



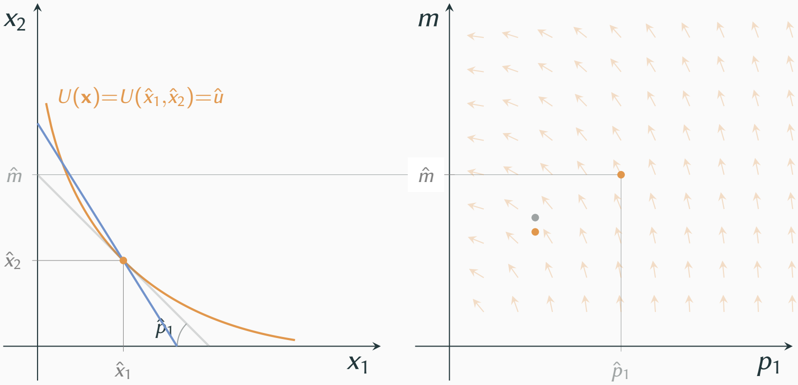
.

Identidade de Roy: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



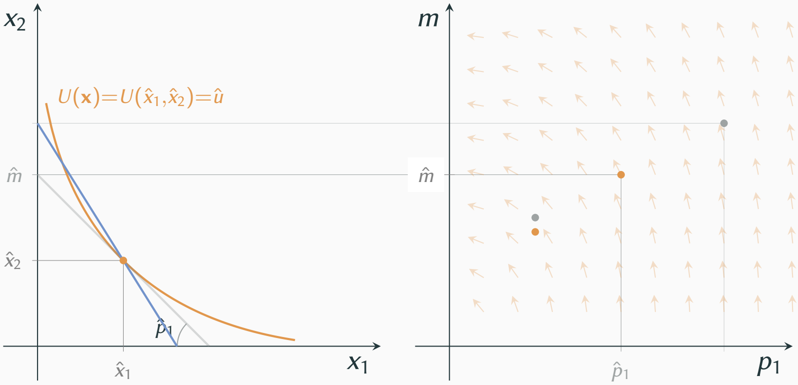
.

Identidade de Roy: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



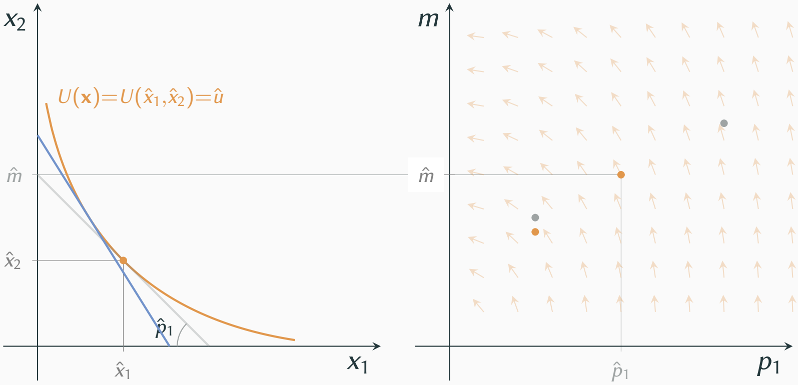
.

Identidade de Roy: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



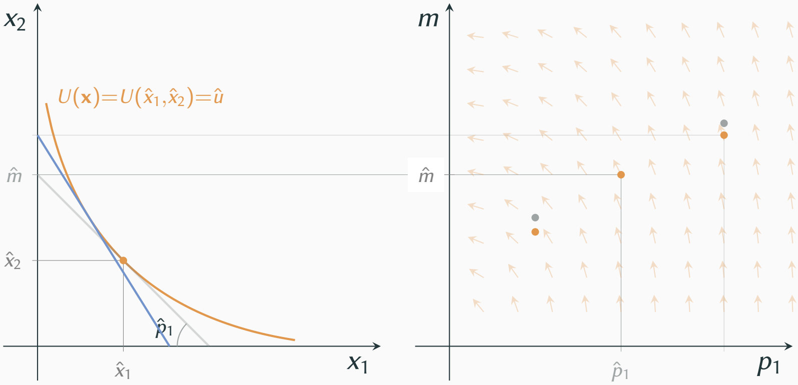
.

Identidade de Roy: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



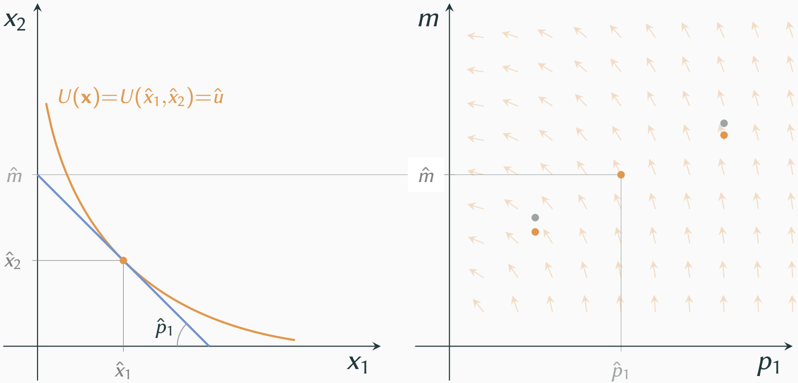
.

Identidade de Roy: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



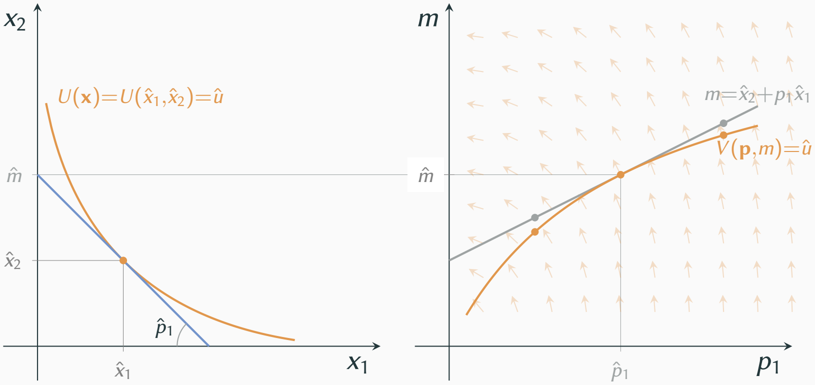
.

Identidade de Roy: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



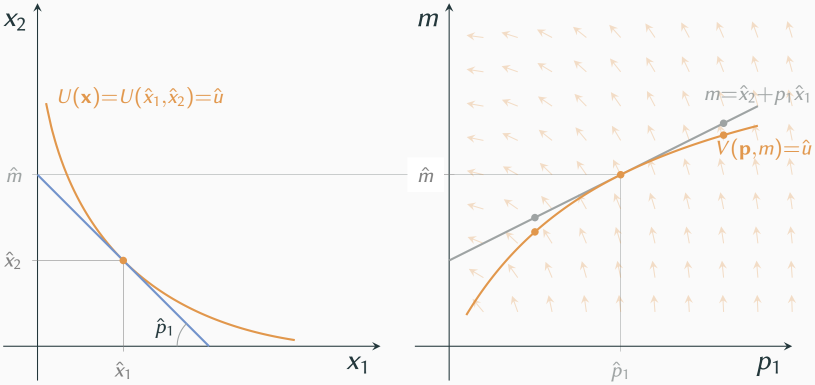
.

Identidade de Roy: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



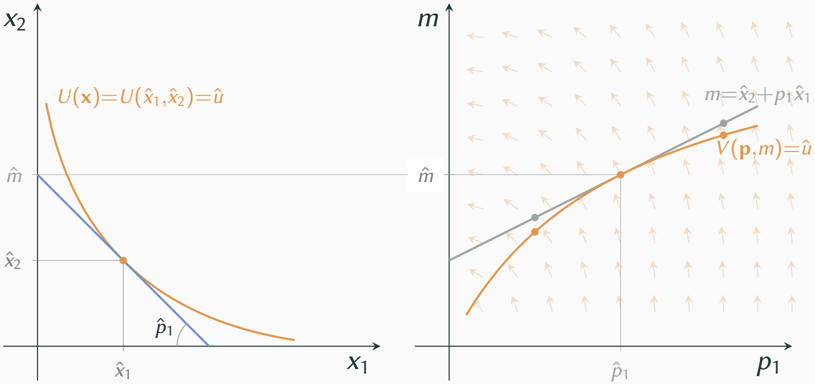
.

Identidade de Roy: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



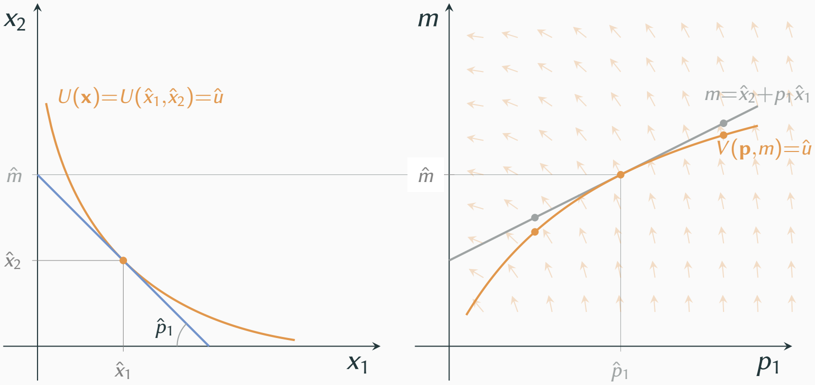
Inclinação da linha cinza é $\hat{x}_1$.

Identidade de Roy: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



Inclinação da linha cinza é $\hat{x}_1$. Inclinação da curva laranja é $-\dfrac{\frac{\partial}{\partial p_1}V(\mathbf{p},m)}{\frac{\partial}{\partial m}V(\mathbf{p},m)}$.

Identidade de Roy: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



Inclinação da linha cinza é $\hat{x}_1$. Inclinação da curva laranja é $-\dfrac{\frac{\partial}{\partial p_1}V(\mathbf{p},m)}{\frac{\partial}{\partial m}V(\mathbf{p},m)}$.

Assim, em $(\hat{p}_1, \hat{m})$ devemos ter $x_1^*(\hat{p}_1, 1, \hat{m}) = \hat{x}_1 = -\dfrac{\frac{\partial}{\partial p_1}V(\mathbf{p},m)}{\frac{\partial}{\partial m}V(\mathbf{p},m)}$.

Exemplo: preferências Cobb Douglas

$$V(p_1, p_2, m) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left(\frac{m}{a+b}\right)^{a+b}$$

Exemplo: preferências Cobb Douglas

$$V(p_1, p_2, m) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left(\frac{m}{a+b}\right)^{a+b}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1} V(p_1, p_2, m) = -a \frac{a^a}{p_1^{a+1}} \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left(\frac{m}{a+b}\right)^{a+b}$$

Exemplo: preferências Cobb Douglas

$$V(p_1, p_2, m) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left(\frac{m}{a+b}\right)^{a+b}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1} V(p_1, p_2, m) = -a \frac{a^a}{p_1^{a+1}} \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left(\frac{m}{a+b}\right)^{a+b}$$

$$\frac{\partial}{\partial m} V(p_1, p_2, m) = (a+b) \left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \frac{m^{a+b-1}}{(a+b)^{a+b}}$$

Exemplo: preferências Cobb Douglas

$$V(p_1, p_2, m) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left(\frac{m}{a+b}\right)^{a+b}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1} V(p_1, p_2, m) = -a \frac{a^a}{p_1^{a+1}} \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left(\frac{m}{a+b}\right)^{a+b}$$

$$\frac{\partial}{\partial m} V(p_1, p_2, m) = (a+b) \left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \frac{m^{a+b-1}}{(a+b)^{a+b}}$$

$$-\frac{\frac{\partial}{\partial p_1}}{\frac{\partial}{\partial m}} = \frac{a}{a+m} \frac{m}{p_1} = x_1^*(p_1, p_2, m)$$

Exemplo: complementares perfeitos

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{am}{p_1 + ap_2}$$

Exemplo: complementares perfeitos

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{am}{p_1 + ap_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1} V(p_1, p_2, m) = -\frac{am}{(p_1 + ap_2)^2}$$

Exemplo: complementares perfeitos

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{am}{p_1 + ap_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1} V(p_1, p_2, m) = -\frac{am}{(p_1 + ap_2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial m} V(p_1, p_2, m) = \frac{a}{p_1 + ap_2}$$

Exemplo: complementares perfeitos

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{am}{p_1 + ap_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1} V(p_1, p_2, m) = -\frac{am}{(p_1 + ap_2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial m} V(p_1, p_2, m) = \frac{a}{p_1 + ap_2}$$

$$-\frac{\frac{\partial}{\partial p_1}}{\frac{\partial}{\partial m}} = \frac{m}{p_1 + ap_2} = x_1^*(p_1, p_2, m)$$

Função de utilidade indireta

Minimização de gastos e funções de dispêndio e demanda compensada

O problema da minimização do gasto

Considere o problema de escolher a cesta de bens $\mathbf{x}$ para uma consumidora de modo a minimizar o custo com a aquisição dessa cesta,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$$

atendendo a um requisito de utilidade mínima

$$U(\mathbf{x}) \geq \bar{u}$$

e às condições de consumo não negativo,

$$\mathbf{x}_i \geq 0.$$

O problema de minimização de gasto

O lagrangeano do problema é

$$\mathscr{L} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda[U(\mathbf{x}) - \bar{u}] + \sum_{i=1}^{L} \mu_i x_i$$

Assumindo não saciedade local, as condições de 1ª ordem implicam

$$U(\mathbf{x}) = \bar{u}$$

e

$$\lambda = \frac{p_i + \mu_i}{\mathrm{UMg}_i},\ \ i = 1, \ldots, L$$

Com $\mu_i = 0$ caso, na solução ótima, $x_i > 0$ e $\mu_i \geq 0$.

Minimização de gasto: propriedades da solução

Caso na solução $x_i, x_j > 0$,

$$\lambda = \frac{p_i}{\mathrm{UMg}_i} = \frac{p_j}{\mathrm{UMg}_j} \Rightarrow \frac{\mathrm{UMg}_i}{\mathrm{UMg}_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

λ é o custo marginal da utilidade.

Minimização de gasto: propriedades da solução

Caso na solução $x_i, x_j > 0$,

$$\lambda = \frac{p_i}{\text{UMg}_i} = \frac{p_j}{\text{UMg}_j} \Rightarrow \frac{\text{UMg}_i}{\text{UMg}_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

λ é o custo marginal da utilidade. Caso na solução $x_i = 0$ e $x_j > 0$,

$$\lambda = \frac{\mathrm{p_i} + \mu_\mathrm{i}}{UMg_i} = \frac{\mathrm{p_j}}{UMg_j}$$

Minimização de gasto: propriedades da solução

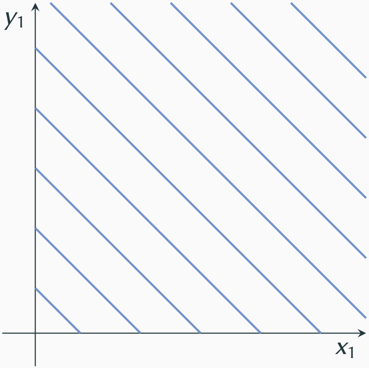
Caso na solução $x_i, x_j > 0$,

$$\lambda = \frac{p_i}{\text{UMg}_i} = \frac{p_j}{\text{UMg}_j} \Rightarrow \frac{\text{UMg}_i}{\text{UMg}_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

λ é o custo marginal da utilidade. Caso na solução $x_i = 0$ e $x_j > 0$,

$$\lambda = \frac{\mathrm{p_i} + \mu_\mathrm{i}}{UMg_i} = \frac{\mathrm{p_j}}{UMg_j} \xrightarrow{(\mu_i \geq 0)} \frac{\text{UMg}_i}{\text{UMg}_j} \leq \frac{p_i}{p_j}$$

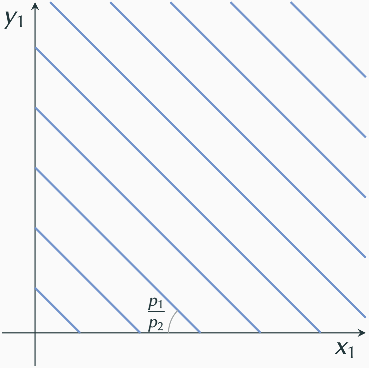
Solução gráfica



As curvas de nível da função objetivo têm a forma $p_1x_1 + p_2x_2 = g$ em que g é um parâmetro que corresponde ao gasto.

Elas são chamadas de linhas de iso custo ou de iso gasto.

Solução gráfica



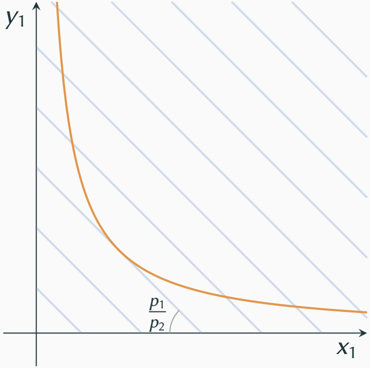
As curvas de nível da função objetivo têm a forma $p_1x_1 + p_2x_2 = g$ em que g é um parâmetro que corresponde ao gasto.

Elas são chamadas de linhas de iso custo ou de iso gasto.

Quanto menor g, mais abaixo e à esquerda estão essas linhas.

Sua inclinação é p_1/p_2.

Solução gráfica



As curvas de nível da função objetivo têm a forma $p_1x_1 + p_2x_2 = g$ em que g é um parâmetro que corresponde ao gasto.

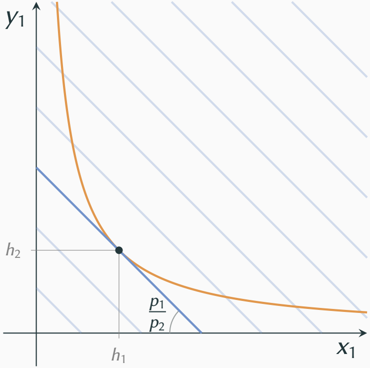
Elas são chamadas de linhas de iso custo ou de iso gasto.

Quanto menor g, mais abaixo e à esquerda estão essas linhas.

Sua inclinação é p_1/p_2.

A curva de indiferença associada ao nível de utilidade $\bar{u}$ é a restrição do problema. A solução, (h_1, h_2), está na linha de iso custo mais baixa que ainda tem ponto em comum com essa curva de indiferença.

Solução gráfica



As curvas de nível da função objetivo têm a forma $p_1x_1 + p_2x_2 = g$ em que g é um parâmetro que corresponde ao gasto.

Elas são chamadas de linhas de iso custo ou de iso gasto.

Quanto menor g, mais abaixo e à esquerda estão essas linhas.

Sua inclinação é p_1/p_2.

A curva de indiferença associada ao nível de utilidade $\bar{u}$ é a restrição do problema. A solução, (h_1, h_2), está na linha de iso custo mais baixa que ainda tem ponto em comum com essa curva de indiferença.

Nessa solução $|TMS| = p_1/p_2$.

Função de demanda compensada

A função $\mathbf{h}(\mathbf{p}, u) = (h_1(\mathbf{p}, u), \ldots, h_L(\mathbf{p}, u))$ que retorna a cesta de bens que resolve o problema de minimização do gasto é denominada função de demanda compensada ou função de demanda hicksiana.

O componente $h_i(\mathbf{p}, u)$, $i = 1, \ldots, L$, é denominado função de demanda compensada ou função de demanda hicksiana pelo bem i.

A função dispêndio

A função dispêndio, notada por $e(\mathbf{p}, u)$, é a função que determina o gasto ótimo associado ao problema de minimização de gasto. Ela é definida por

$$e(\mathbf{p}, u) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}, u)$$

Exemplo: preferências Cobb Douglas

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

Condições de primeira ordem:

$$|TMS| = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{a}{b}\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Exemplo: preferências Cobb Douglas

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

Condições de primeira ordem:

$$|TMS| = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{a}{b}\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{e} \quad U(x_1, x_2) = u \Rightarrow x_1^a x_2^b = u$$

Exemplo: preferências Cobb Douglas

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

Condições de primeira ordem:

$$|TMS| = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{a}{b}\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{e} \quad U(x_1, x_2) = u \Rightarrow x_1^a x_2^b = u$$

Resolvendo para x_1 e x_2 encontramos

$$h_1(p_1, p_2, u) = u^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{p_2}{p_1}\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}}$$

e

$$h_2(p_1, p_2, u) = u^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{p_1}{p_2}\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{a+b}}$$

Exemplo: preferência Cobb Douglas (continuação)

A função de dispêndio é obtida aplicando-se sua definição

$$e(p_1, p_2, u) = p_1 h_1(p_1, p_2, u) + p_2 h_2(p_1, p_2, u)$$

Exemplo: preferência Cobb Douglas (continuação)

A função de dispêndio é obtida aplicando-se sua definição

$$e(p_1, p_2, u) = p_1 h_1(p_1, p_2, u) + p_2 h_2(p_1, p_2, u)$$

$$e(p_1, p_2, u) = p_1 u^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{p_2}{p_1}\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} + p_2 u^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{p_1}{p_2}\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{a+b}}$$

Exemplo: preferência Cobb Douglas (continuação)

A função de dispêndio é obtida aplicando-se sua definição

$$e(p_1, p_2, u) = p_1 h_1(p_1, p_2, u) + p_2 h_2(p_1, p_2, u)$$

$$e(p_1, p_2, u) = p_1 u^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{p_2}{p_1} \frac{a}{b} \right)^{\frac{b}{a+b}} + p_2 u^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{p_1}{p_2} \frac{b}{a} \right)^{\frac{a}{a+b}}$$

Ou, após algumas manipulações algébricas,

$$e(p_1, p_2, u) = (a+b) u^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{p_1}{a} \right)^{\frac{a}{a+b}} \left(\frac{p_2}{b} \right)^{\frac{b}{a+b}} .$$

A lei da demanda compensada

Considere $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{p}^1$, e u quaisquer. Por definição $U(\mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u)) = u = U(\mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u))$.

A lei da demanda compensada

Considere $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{p}^1$, e u quaisquer. Por definição $U(\mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u)) = u = U(\mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u))$. Então,

$$\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u) \leq \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u)$$

A lei da demanda compensada

Considere $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{p}^1$, e u quaisquer. Por definição $U(\mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u)) = u = U(\mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u))$. Então,

$$\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u) \leq \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u) \Rightarrow -\mathbf{p}^0 \cdot \left[\mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u) - \mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u)\right] \leq 0$$

A lei da demanda compensada

Considere $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{p}^1$, e u quaisquer. Por definição $U(\mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u)) = u = U(\mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u))$. Então,

$$\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u) \leq \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u) \Rightarrow -\mathbf{p}^0 \cdot \left[\mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u) - \mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u)\right] \leq 0$$

e:

$$\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u) \leq \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u) \Rightarrow \mathbf{p}^1 \cdot \left[\mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u) - \mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u)\right] \leq 0$$

A lei da demanda compensada

Considere $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{p}^1$, e u quaisquer. Por definição $U(\mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u)) = u = U(\mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u))$. Então,

$$\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u) \leq \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u) \Rightarrow -\mathbf{p}^0 \cdot \left[\mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u) - \mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u)\right] \leq 0$$

e:

$$\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u) \leq \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u) \Rightarrow \mathbf{p}^1 \cdot \left[\mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u) - \mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u)\right] \leq 0$$

Somando as duas desigualdades, obtemos

$$(\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^0) \cdot \left[\mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u) - \mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u)\right] \leq 0$$

A lei da demanda compensada

$$(\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^0) \cdot \left[\mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u) - \mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u)\right] \leq 0$$

Reescrevendo com notação de somatória, obtemos

$$\sum_{i=1}^{L}(p_i^1 - p_i^0)(h_i(\mathbf{p}^1, u) - h_i(\mathbf{p}^0, u)) \leq 0$$

Considere um bem k qualquer e assuma que, para todo $i \neq k$, $p_i^i = p_i^0$. Nesse caso, a expressão acima se reduz a

$$(p_k^1 - p_k^0)[h_i(\mathbf{p}^1, u) - h_i(\mathbf{p}^0, u)] \leq 0,$$

A lei da demanda compensada

$$(\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^0) \cdot \left[\mathbf{h}(\mathbf{p}^1, u) - \mathbf{h}(\mathbf{p}^0, u)\right] \leq 0$$

Reescrevendo com notação de somatória, obtemos

$$\sum_{i=1}^{L} (p_i^1 - p_i^0)(h_i(\mathbf{p}^1, u) - h_i(\mathbf{p}^0, u)) \leq 0$$

Considere um bem k qualquer e assuma que, para todo $i \neq k$, $p_i^i = p_i^0$. Nesse caso, a expressão acima se reduz a

$$(p_k^1 - p_k^0)[h_i(\mathbf{p}^1, u) - h_i(\mathbf{p}^0, u)] \leq 0,$$

o que só pode ocorrer quando a variação na demanda compensada, $h_k(\mathbf{p}^1, u) - h_k(\mathbf{p}^0, u)$ não tem o mesmo sinal que a variação no preço, $p_k^1 - p_k^0$.

Propriedades da função dispêndio

Não cecrescente em relação aos preços:

$$\mathbf{p}^1 > \mathbf{p}^0 \Rightarrow e(\mathbf{p}^1, u) \geq e(\mathbf{p}^0, u)$$

Propriedades da função dispêndio

Não cecrescente em relação aos preços:

$$\mathbf{p}^1 > \mathbf{p}^0 \Rightarrow e(\mathbf{p}^1, u) \geq e(\mathbf{p}^0, u)$$

Homogênea de grau 1 em relação aos preços, isto é $\forall \alpha > 0$:

$$e(\alpha \mathbf{p}, u) = \alpha e(\mathbf{p}, u)$$

Propriedades da função dispêndio

Não cecrescente em relação aos preços:

$$\mathbf{p}^1 > \mathbf{p}^0 \Rightarrow e(\mathbf{p}^1, u) \geq e(\mathbf{p}^0, u)$$

Homogênea de grau 1 em relação aos preços, isto é $\forall \alpha > 0$:

$$e(\alpha \mathbf{p}, u) = \alpha e(\mathbf{p}, u)$$

Não decrescente em relação à utilidade:

$$u^1 > u^0 \Rightarrow e(\mathbf{p}, u^1) \geq e(\mathbf{p}, u^0)$$

Propriedades da função dispêndio (continuação)

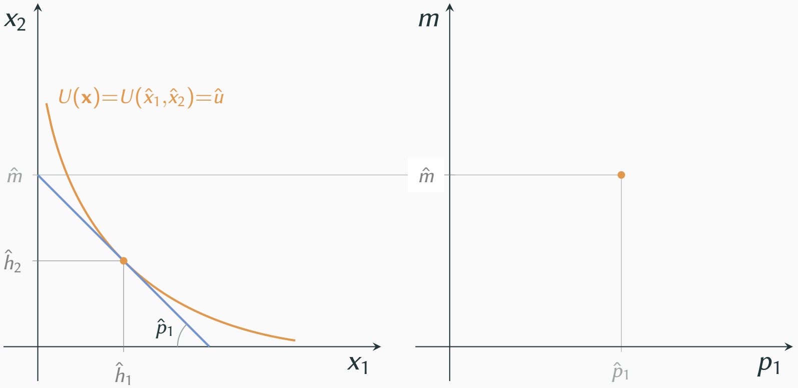
Côncava em relação aos preços, ou seja, para qualquer $0 < \alpha < 1$,

$$e(\alpha \mathbf{p}^0 + (1-\alpha)\mathbf{p}^1, u) \leq \alpha e(\mathbf{p}^0, u) + (1-\alpha) e(\mathbf{p}^1, u)$$

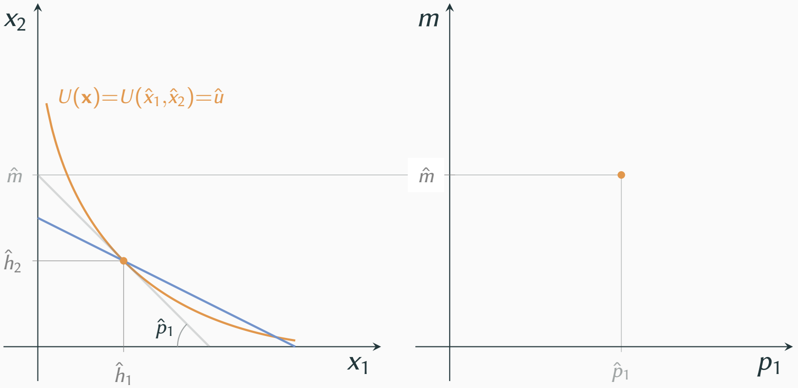
Lema de Shephard

$$\frac{\partial}{\partial p_i} e(\mathbf{p}, u) = h_i(\mathbf{p}, u)$$

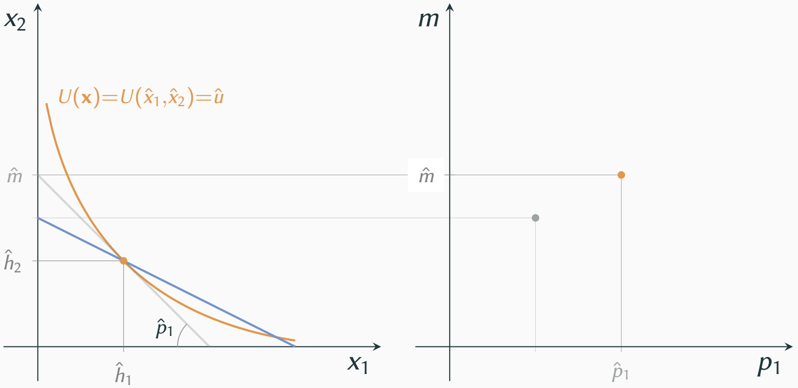
Lema de Shephard: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



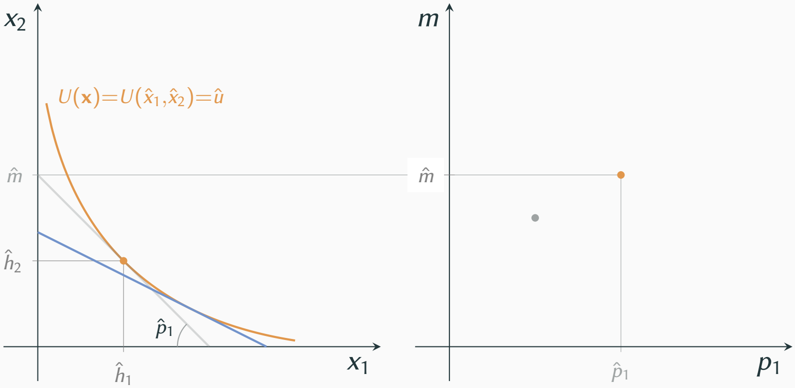
Lema de Shephard: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



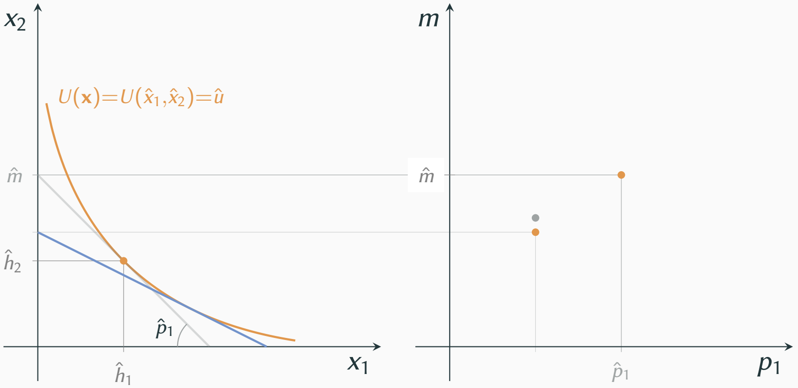
Lema de Shephard: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



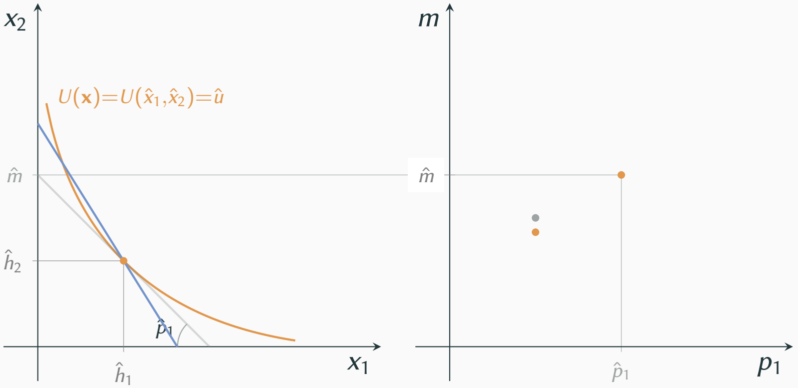
Lema de Shephard: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



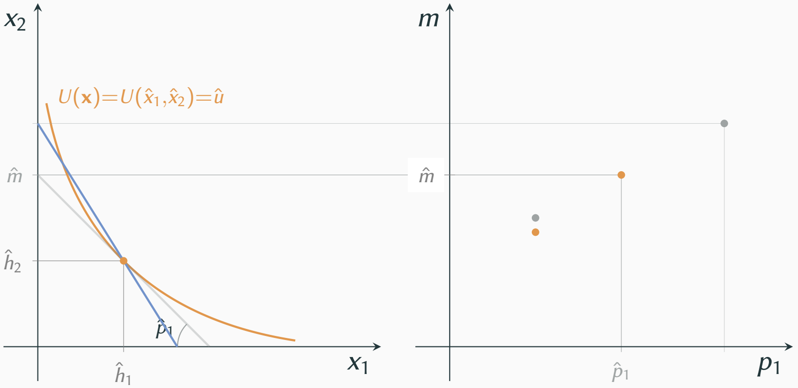
Lema de Shephard: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



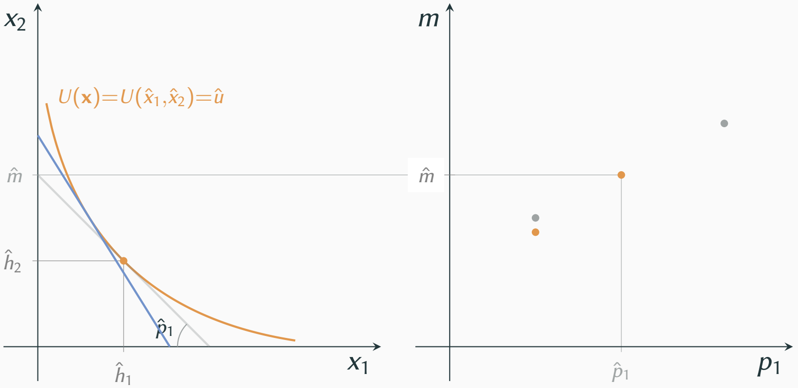
Lema de Shephard: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



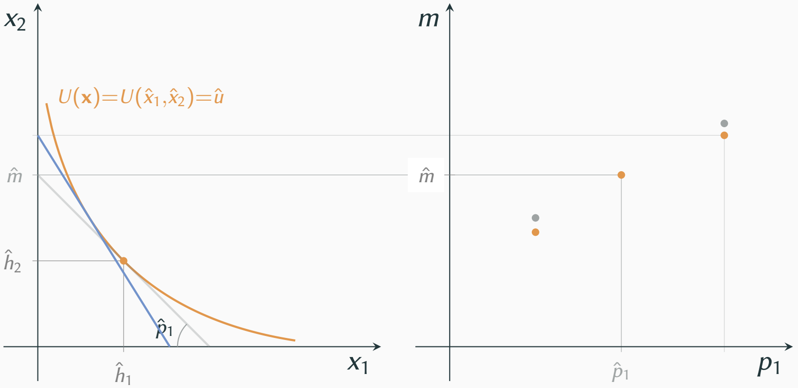
Lema de Shephard: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



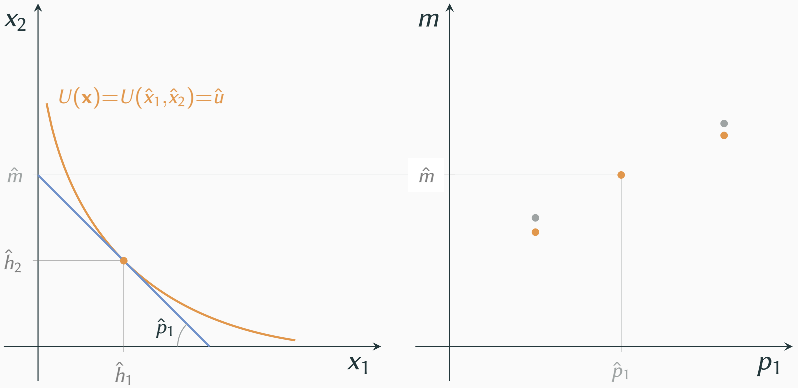
Lema de Shephard: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



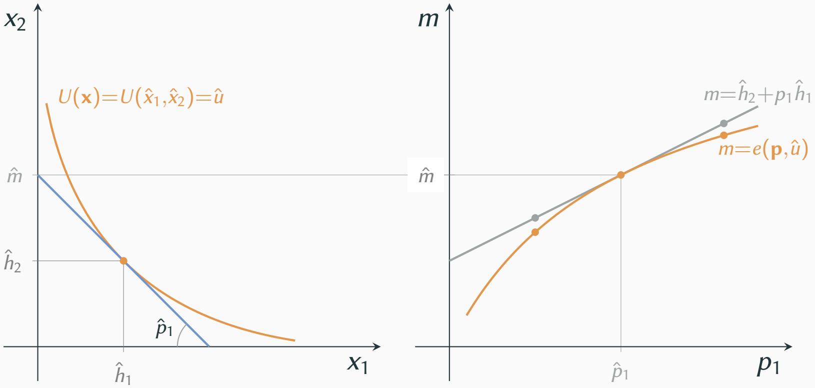
Lema de Shephard: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



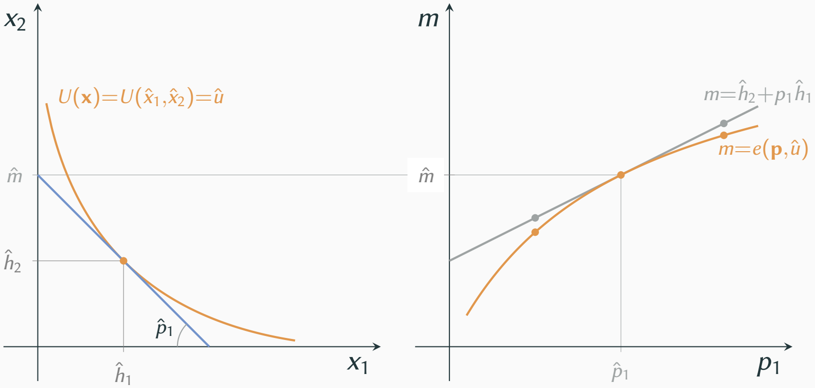
Lema de Shephard: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



Lema de Shephard: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.

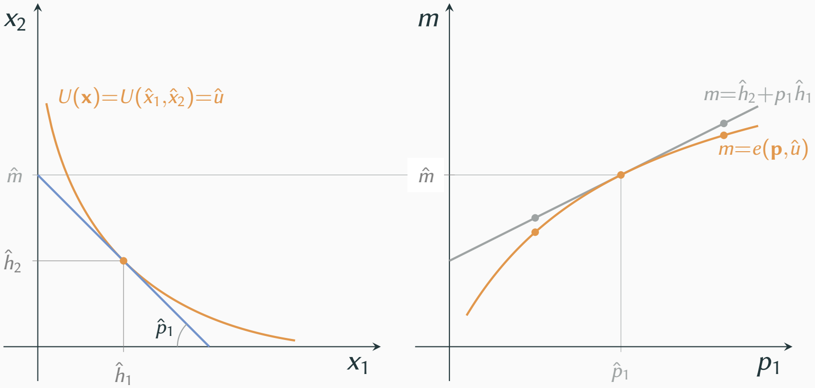


Lema de Shephard: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



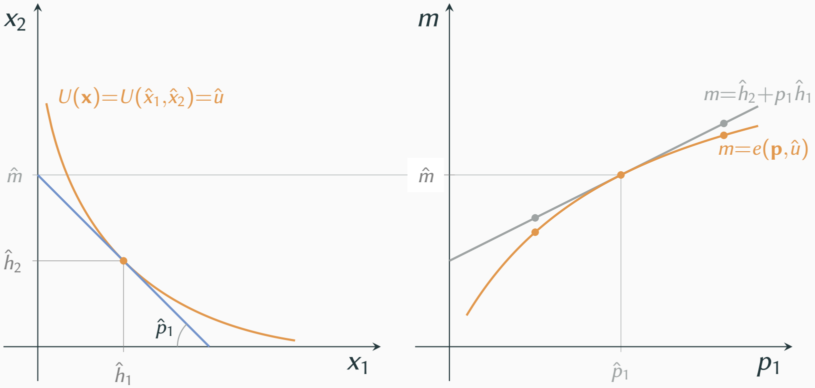
Inclinação da linha cinza é $\hat{h}_1$.

Lema de Shephard: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



Inclinação da linha cinza é $\hat{h}_1$. Inclinação da curva laranja é $\frac{\partial}{\partial p_1} e(\mathbf{p}, \hat{u})$.

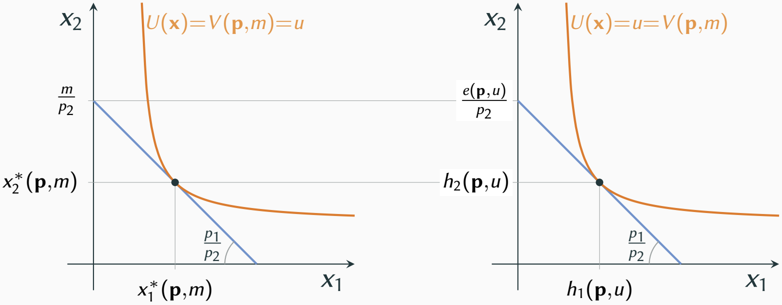
Lema de Shephard: ilustração gráfica com $p_2 = 1$.



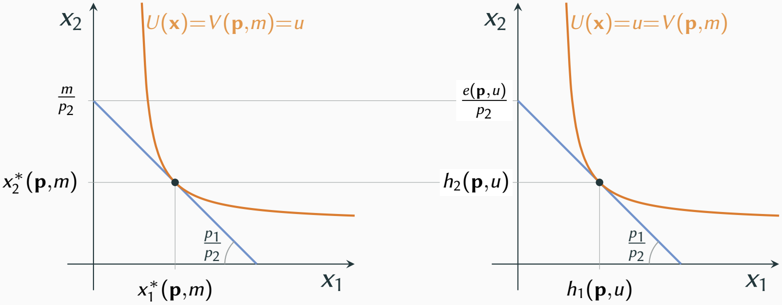
Inclinação da linha cinza é $\hat{h}_1$. Inclinação da curva laranja é $\frac{\partial}{\partial p_1} e(\mathbf{p}, \hat{u})$.

Assim, em $(\hat{p}_1, \hat{m})$ devemos ter $h_1^*(\hat{p}_1, 1, \hat{u}) = \hat{h}_1 = \frac{\partial}{\partial p_1} e(\mathbf{p}, \hat{u})$.

Identidades importantes

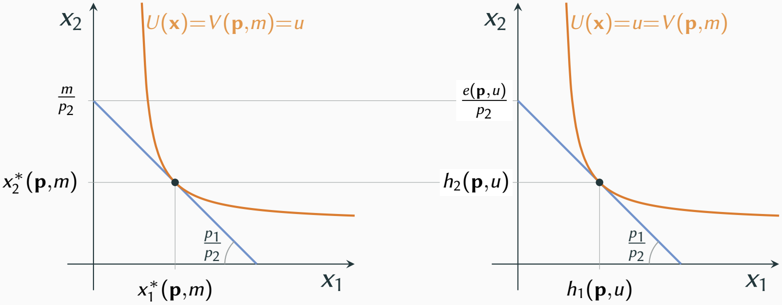


Identidades importantes



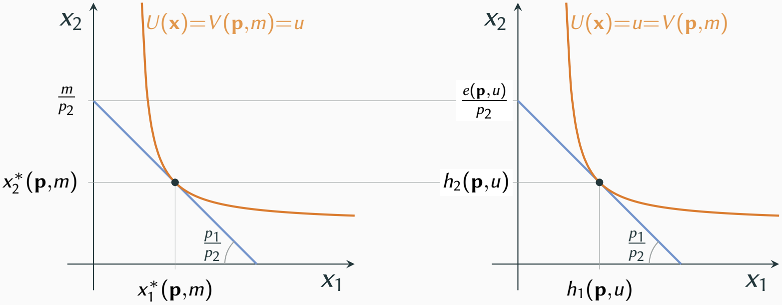
$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, u)$$

Identidades importantes



$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, u) \qquad V(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u$$

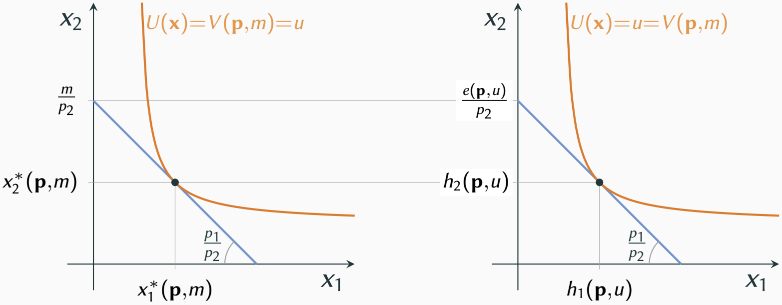
Identidades importantes



$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, u) \qquad V(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, m)) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, m)$$

Identidades importantes



$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, u) \qquad V(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, m)) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, m) \qquad e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, m)) = m$$

Exemplo: preferências Cobb-Douglas

A função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, m) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left(\frac{m}{a+b}\right)^{a+b}$$

Exemplo: preferências Cobb-Douglas

A função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, m) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left(\frac{m}{a+b}\right)^{a+b}$$

Função dispêndio:

$$V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = u$$

Exemplo: preferências Cobb-Douglas

A função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, m) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left(\frac{m}{a+b}\right)^{a+b}$$

Função dispêndio:

$$V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = u$$

$$\left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left[\frac{e(p_1, p_2, m)}{a+b}\right]^{a+b} = u$$

Exemplo: preferências Cobb-Douglas

A função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, m) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left(\frac{m}{a+b}\right)^{a+b}$$

Função dispêndio:

$$V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = u$$

$$\left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left[\frac{e(p_1, p_2, m)}{a+b}\right]^{a+b} = u$$

$$e(p_1, p_2, u) = (a+b)u^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{p_1}{a}\right)^{\frac{a}{a+b}} \left(\frac{p_2}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}}$$

Exemplo: Substitutos perfeitos

A função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{am}{\min\{p_1, ap_2\}}$$

Exemplo: Substitutos perfeitos

A função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{am}{\min\{p_1, ap_2\}}$$

Função dispêndio:

$$V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = u$$

Exemplo: Substitutos perfeitos

A função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{am}{\min\{p_1, ap_2\}}$$

Função dispêndio:

$$V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = u$$
$$\frac{ae(p_1, p_2, u)}{\min\{p_1, ap_2\}} = u$$

Exemplo: Substitutos perfeitos

A função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{am}{\min\{p_1, ap_2\}}$$

Função dispêndio:

$$V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = u$$
$$\frac{ae(p_1, p_2, u)}{\min\{p_1, ap_2\}} = u$$
$$e(p_1, p_2, u) = \frac{u}{a}\min\{p_1, ap_2\}.$$

Exemplo: Complementares perfeitos

A função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{am}{p_1 + ap_2}$$

Exemplo: Complementares perfeitos

A função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{am}{p_1 + ap_2}$$

Função dispêndio:

$$V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = u$$

Exemplo: Complementares perfeitos

A função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{am}{p_1 + ap_2}$$

Função dispêndio:

$$V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = u$$
$$\frac{ae(p_1, p_2, u)}{p_1 + ap_2} = u$$

Exemplo: Complementares perfeitos

A função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{am}{p_1 + ap_2}$$

Função dispêndio:

$$V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = u$$
$$\frac{ae(p_1, p_2, u)}{p_1 + ap_2} = u$$
$$e(p_1, p_2, u) = \frac{u}{a} \times (p_1 + ap_2)$$