valor presente líquido

Roberto Guena de Oliveira

23 de agosto de 2015

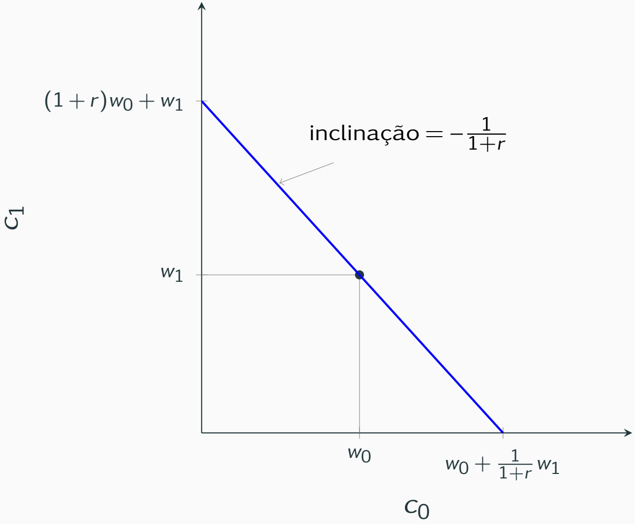
alocação intertemporal do consumo

- w_0 renda do consumidor no ano 0;
- w_1 renda do consumidor no ano 1;
- c_0 renda do consumidor no ano 0;
- c_1 renda do consumidor no ano 1;
- r taxa de juros (igual para credores e devedores).

Possibilidades de consumo

$$c_0 + \frac{1}{1+r} c_1 = w_0 + \frac{1}{1+r} w_1.$$

ilustração gráfica



avaliação de uma alternativa de investimento

- Custo do investimento $= k$;
- valor do investimento em um ano $= v$;
- recursos disponíveis no ano 0 quando consumidor realiza o investimento $= w_0 - k$;
- recursos disponíveis no ano 0 quando consumidor realiza o investimento $= w_1 + v$;

avaliação de uma alternativa de investimento (continuação)

Possibilidades de consumo antes do investimento:

$$c_0 + \frac{1}{1+r} c_1 = w_0 + \frac{1}{1+r} w_1.$$

Possibilidades de consumo após o investimento:

$$c_0 + \frac{1}{1+r} c_1 = w_0 + \frac{1}{1+r} w_1 + \frac{1}{1+r} v - k.$$

Condição para que o investimento seja vantajoso:

$$\frac{1}{1+r} v - k > 0.$$

ilustração gráfica: caso em que o investimento vale a pena

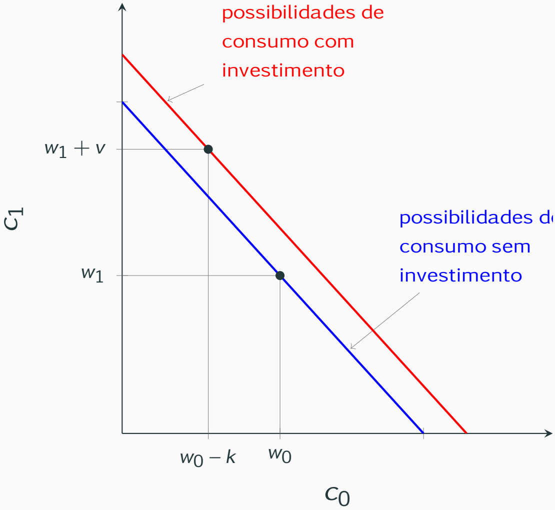


ilustração gráfica: caso em que o investimento vale a pena

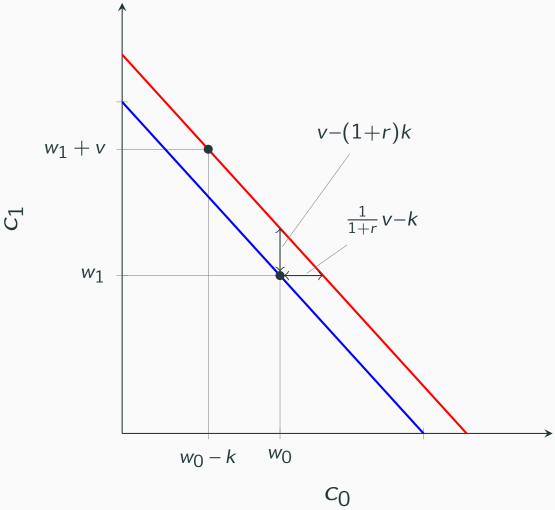
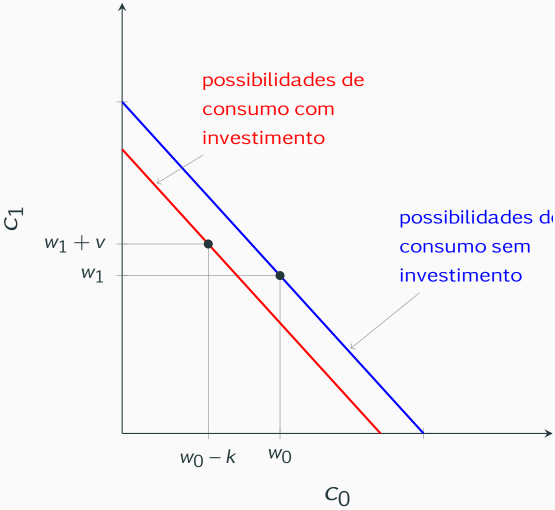


ilustração gráfica: caso em que o investimento não vale a pena



regra do valor presente líquido

Valor presente líquido (VPL)

O *valor presente líquido de um projeto* é a variação na renda do consumidor no período 0 que o deixaria tão bem quanto realizando o projeto. No nosso exemplo,

$$VPL = \frac{v}{1+r} - k.$$

Regra para decisão acerca de um projeto

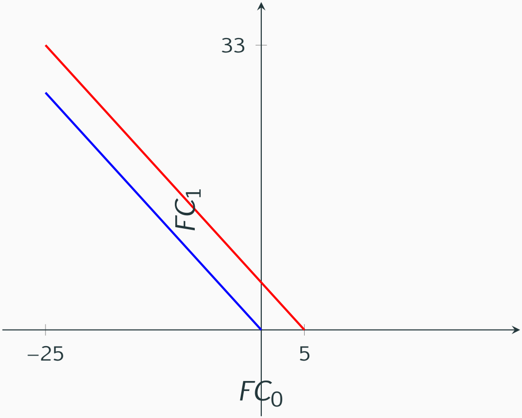
Caso a taxa de juros para tomar empréstimos seja igual à taxa de juros para ceder empréstimos, qualquer investimentos com $VPL > 0$ deve ser realizado.

uma empresa como um projeto: exemplo

- Os acionistas precisam de R$25 mil para dar início a uma empresa;
- A taxa de juros é de 10% ao ano;
- Existe um projeto de investimento que fará com que, em um ano, a empresa gere um caixa de R$33 mil;
- Então, o valor presente líquido da empresa para os acionistas é

$$VPL = \frac{33}{1+0{,}1} - 25 = 5.$$

uma empresa como um projeto



efeito de uma diferença entre a taxa de juros para o devedor e a taxa de juros para o credor.

r é a taxa de juros recebida pelo credor.

i é a taxa de juros paga pelo devedor.

w_0 renda no ano 0.

c_1 consumo no ano 1.

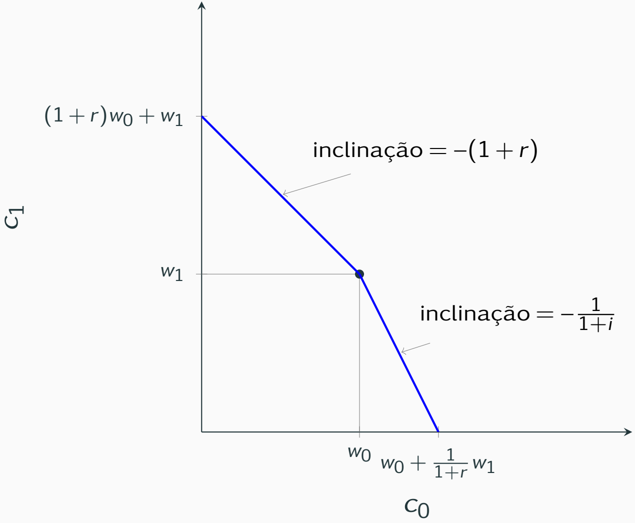
c_0 consumo no ano 0.

w_1 renda no ano 1.

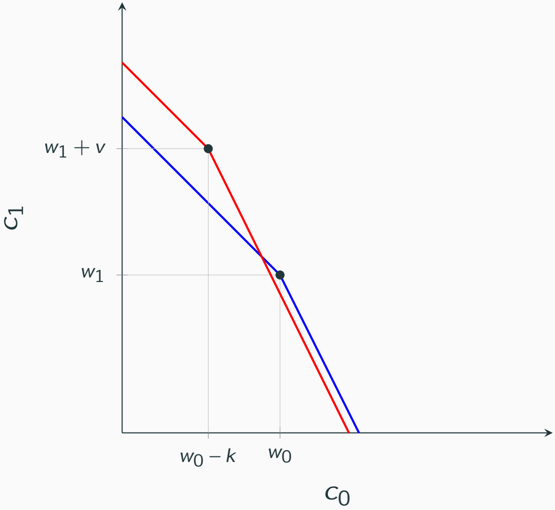
Possibilidades de consumo:

$$\begin{cases} c_0 + \frac{c_1}{1+r} = w_0 + \frac{w_1}{1+r} & \text{caso } c_0 \leq w_0 \\ c_0 + \frac{c_1}{1+i} = w_0 + \frac{w_1}{1+i} & \text{caso } c_0 \geq w_0 \end{cases}$$

ilustração gráfica



decisão de investimento



multiplos períodos

capitalização

Se r é a taxa de juros cobrada pelo empréstimo de um ano, então,

- Se alguém empresta um valor k no ano 0, no ano 1 receberá $k(1+r)$.
- Se essa pessoa empresta esse valor recebido no ano 1, no ano 2 receberá $k(1+r)(1+r) = k(1+r)^2$.
- Se ela empresta esse valor por mais um ano, ao final do terceiro ano, receberá $k(1+r)^3$.
- Se ela continuar a fazer isso até o ano t, obterá, nesse ano, $k(1+r)^t$.
- Ao final de cada ano, os juros recebidos no ano anterior são transformados em capital de um novo empréstimo (capitalizados) e passam a render, eles mesmos, juros.

relação entre juros de empréstimos com prazos diferentes:

Se a taxa de juros de empréstimos anuais é constante e igual a r, qual deve ser o juro por R$ emprestado para um empréstimo de t anos?

relação entre juros de empréstimos com prazos diferentes — exemplo:

Suponha que para cada R$ emprestado no ano zero o mercado pague, no ano 2 $v > (1+r)^2$. Nesse caso, é possível fazer dinheiro no ano 2 da seguinte maneira:

- No ano 0 contraímos um empréstimo de R$1 pelo prazo de 1 ano e emprestamos esse valor pelo prazo de 2 anos;
- No ano 1 contraímos um empréstimo de $1+r$ reais, os quais usamos integralmente para pagar o empréstimo anterior.
- No ano 2 recebemos o valor v devido por nosso devedor. Com parte desse valor, $(1+r)^2$, pagamos o que devemos do empréstimo contraído no ano 1. O restante, $v-(1+r)^2$ é ganho líquido.

relação entre juros de empréstimos com prazos diferentes — exemplo:

Suponha que para cada R$ emprestado no ano zero o mercado pague, no ano 2 $v < (1+r)^2$. Nesse caso, é possível fazer dinheiro no ano 2 da seguinte maneira:

- No ano 0, contraímos um empréstimo de R$1 pelo prazo de 2 anos e emprestamos esse valor pelo prazo de 1 ano;
- No ano 1, recebemos $1+r$ reais advindos do valor emprestado no ano anterior e emprestamos por mais um ano.
- Como pagamento desse empréstimo, recebemos, no ano 2 $(1+r)^2$ reais com os quais pagamos o valor v do empréstimo obtido no ano 0,ficando com um ganho líquido de $(1+r)^2 - v$.

relação entre juros de empréstimos com prazos diferentes — conclusão:

Se a taxa de juros anual é constante e igual a r, então

1. O valor cobrado por R$ emprestado pelo período de 2 anos deverá ser de $(1+r)^2$ reais;
2. de um modo mais geral, o valor cobrado por R$ emprestado no período de t anos deverá ser igual a $(1+r)^t$ reais.
3. Dizemos que um empréstimo de t anos que cobra $(1+r)^t$ reais por real emprestado tem taxa de juros anuais compostos igual a r. Esse empréstimo paga tanto quanto o credor obteria se fizesse t empréstimos anuais sucessivos à taxa de juros r.

juros compostos exemplo 1:

Maria contraiu um empréstimo de R\$1000,00 com uma taxa de juros compostos de 10% ao ano a ser pago integralmente ao final de cinco anos. Quanto Maria deverá pagar nessa data? Resposta:

$$1000 \times (1{,}1)^5 = \text{R\$}1276{,}28$$

juros compostos exemplo 2:

João contraiu um empréstimo no valor de R\$1000,00, que deverá ser liquidade em pagamento único daqui a três anos no valor de R\$1225,041. Qual a taxa anual de juros compostos desse empréstimo?

Resposta:

$$1000 \times (1 + r)^3 = 1225{,}041 \Rightarrow 1 + r = \sqrt[3]{1{,}225041}$$

$$1 + r = 1{,}07 \Rightarrow r = 7\%.$$

valor futuro.

Definição

O *valor futuro*, no período T, de uma determinada quantia de dinheiro k disponível no período $t < T$, calculado à taxa de juros r, é o valor que essa quantida atingirá caso seja emprestada à taxa de juros r até o período t:

$$VF = k(1+r)^{T-t}.$$

Exemplo

O valor futuro de R\$1000 disponíveis no período zero, calculado para o período 2, à taxa de juros de 10% é

$$VF = 1000 \times (1+0{,}1)^2 = \text{R\$}1210.$$

valor presente

Definição

O *valor presente*, à taxa de juros r, de uma determinada quantia de dinheiro v disponível no período t é o valor que, aplicado no período 0 à taxa de juros r gera, no período t, o valor futuro v:

$$VP(1+r)^t = v \Rightarrow VP = \frac{v}{(1+r)^t}$$

Exemplo

O valor presente de R\$1210 disponíveis daqui a dois anos, consideran se uma taxa de juros de 10% a.a. é

$$VP = \frac{1210}{(1+0{,}1)^2} = \text{R\$}1000.$$

Definição

O *valor presente líquido* de um fluxo de caixa $C_0, C_1, \ldots, C_T$ é a soma dos valores presentes de cada um de seus componentes:

$$VPL = C_0 + \frac{C_1}{(1+r)} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C_T}{(1+r)^T} = \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

Exemplo

Se a taxa de juros é de 10% ao ano, o valor presente líquido de um projeto que prevê uma saída de caixa inicial de R\$100 seguida de uma entrada de caixa de R\$60 ao final de um ano e outra entrada de caixa de R\$65 ao final de dois anos é

$$VPL = -100 + \frac{60}{1{,}1} + \frac{65}{1{,}1^2} = 8{,}264463.$$

anuidades

Qual o valor presente de um fluxo de caixa que paga, por T anos, o valor C ao final de cada ano?

$$VP = C\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^T}\right].$$

Qual é o valor futuro (no ano T) desse mesmo fluxo de caixa?

$$VF = C\,\frac{(1+r)^T - 1}{r}$$

exemplo

Seu filho acaba de nascer. A cada aniversário dele, você pretende depositar um determinado valor em uma aplicação que rende 10% ao ano. Quando ele fizer 18 anos, você espera obter o suficiente para pagar sua faculdade que você imagina que deve custar R$30 000 por ano por quatro anos. Quanto você deve depositar a cada aniversário de seu filho.

anuidades com pagamentos crescentes

Qual o valor presente de um fluxo de caixa com pagamento inicial C e fluxos anuais com crescimento a uma taxa anual g?

$$VP = C\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^T}{r-g}.$$

perpetuidades

Qual o valor presente de um fluxo de caixa que paga, até o final dos tempos, anualmente o valor C?

$$VP = \frac{C}{r}.$$

perpetuidades crescentes

Qual o valor presente de um título que paga daqui a um ano o valor C e a cada ano seguinte o valor do ano anterior acrescido de uma taxa $g < r$?

$$VP = \frac{C}{r - g}$$

extensões

período de capitalização

- Se um empréstimo de t anos paga tanto quanto o credor obteria caso fizesse t empréstimos anuais sucessivos com a taxa de juros anual r, dizemos que esse empréstimo apresenta taxa de juros compostos *com capitalização anual* iguais a r.
- Se um empréstimo de t anos paga tanto quanto o credor obteria caso fizesse $12 \times t$ empréstimos mensais sucessivos com a taxa de juros mensal r, dizemos que esse empréstimo apresenta taxa de juros compostos *com capitalização mensal* iguais a r.

diferentes formas de expressar uma taxa de juros: exemplos

- $r = \dfrac{1\%}{\text{mês}} = \dfrac{1\%}{\text{ano}/12} = \dfrac{12\%}{\text{ano}}$
- $r = \dfrac{6\%}{\text{ano}} = \dfrac{6\%}{12\,\text{meses}} = \dfrac{0{,}5\%}{\text{mês}}$
- A unidade de tempo na qual a taxa de juros é expressa não necesariamente coincide com a periodicidade de captalização dos juros.

exemplo.

Qual será a rentabilidade anual de um empréstimo de R$100 que cobra uma taxa de juros de 6% ao ano com capitalização mensal?

$$VF = 100 \times \left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{12} = 106{,}167781.$$

Portanto a rentabilidade anual é de 6,167 781%. No nosso exemplo, dizemos que 6% é a taxa de juros cotada do empréstimo e que 6,167 781% é a taxa de juros anual efetiva ou a rentabilidade efetiva (ou, do ponto de vista do devedor, taxa de custo efetivo) do empréstimo.

taxa efetiva: fórmula

Um investimento de um ano do valor C com m capitalizações (m é a frequência de composição) e taxa de juros expressa em anos igual a r gera uma riqueza ao final de um ano igual a

$$C\left(1+\frac{r}{m}\right)^m.$$

A rentabilidade anual efetiva desse investimento é, portanto,

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1.$$

exemplo: relação entre frequência de composição e taxa anual efetiva para uma taxa de juros cotada de 12% a.a.

Tipo de Composição	Frequência de composição	Taxa anual efetiva de juros
Anual	1	0,12
Semestral	2	0,1236
Quadrimestral	3	0,124 864
Trimestral	4	0,125 509
Bimestral	6	0,126 162
Mensal	12	0,126 825
Diária	365	0,127 475

composição por vários anos.

Se a taxa de juros anual cotada é r e a frequência de composição é m, ao emprestar o valor C por T anos, obtém-se, ao final desses anos um valor igual a

$$C \times \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT}.$$

exemplo:

Quanto se obtém ao final de 10 anos de um investimento inicial de R\$100 com taxa de juros cotada a 10% ao ano com capitalização mensal?

$$100 \times \left(1 + \frac{0{,}10}{12}\right)^{10\times12} = 270{,}704149.$$

capitalização contínua

À medida em que a frequência de capitalização aumenta o valor devido ao final de um empréstimo de valor C com taxa de juros cotada r e prazo T se aproxima cada vez mais de

$$C \times \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times T} = C\mathrm{e}^{rT}$$

em que e é um número real conhecido como *constante de Euler* cujo valor aproximado é 2,718 282.

exemplo

Qual o valor presente de um título que paga R$1000 daqui a 4 anos considerando-se uma taxa de juros de 8% ao ano com capitalização contínua?

$$VP \times \mathrm{e}^{0,08 \times 4} = 1000 \Rightarrow VP = \frac{1000}{\mathrm{e}^{0,32}} \approx 1377,127764$$

exemplo:

Um título comprado pelo valor de R$1000 deverá pagar R$1210 em dois anos. Determine a taxa de juros desse título pressupondo:

1. Capitalização anual.
2. Capitalização semestral.
3. Capitalização trimestral.
4. Capitalização mensal.
5. Capitalização contínua.