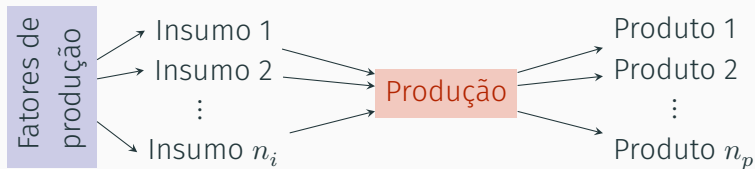


Produção

Roberto Guena de Oliveira

15 de maio de 2025

Representação gráfica



Insumos são os itens que são incorporados ao produto e/ ou aos resíduos da produção;

Produtos são os itens que resultam do processo produtivo;

Produção é o processo de transformação de insumos em produtos;

Fatores de produção são as fontes de insumo empregados na produção.

Muitos autores, diferentemente do que fazemos aqui, usam fatores de produção e insumos como sinônimos.

Tipos de fatores de produção

Estoque de bens

Estoques de bens que serão empregados como insumos do processo produtivo (matérias primas, combustíveis).

Fundos de serviços

Objetos empregados mas não consumidos no processo produtivo. Dizemos que a produção consome os serviços desses objetos. Seu uso é medido em tempo e, em alguns casos intensidade. Exemplos: máquinas, instalações, equipamentos, terra agrícola, força de trabalho.

Empregaremos o termo **bem** para designar tanto bens físicos quanto serviços consumidos em processo de produção ou de consumo final. Desse modo, todo insumo do processo produtivo é um bem.

Um bem é perfeitamente identificado por suas características intrínsecas mais a localização e o momento de tempo no qual é disponibilizado.

Descrição da produção

Número de bens ℓ indexados por $\ell = 1, 2, \dots, \ell$;

Número de produtores n indexados por $j = 1, 2, \dots, n$;

Produção líquida $y_{j,h}$ = produção do bem h menos uso do bem h pelo produtor j .

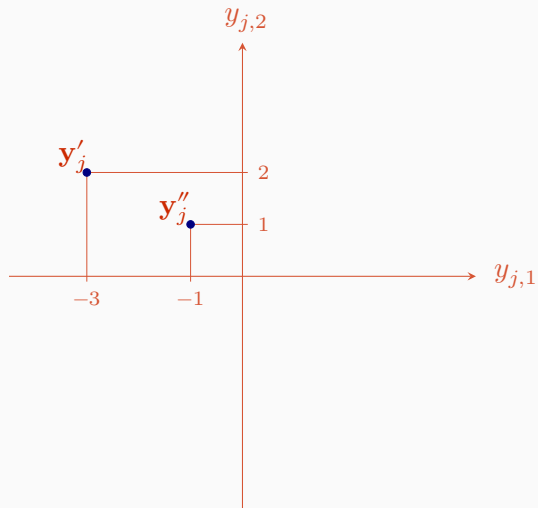
Plano de produção ou vetor de produção líquida

$$\mathbf{y}_j = (y_{j,1}, y_{j,2}, \dots, y_{j,\ell})$$

Conjunto de produção de um produtor j qualquer, notado por Y_j é o conjunto de planos de produção que são fisicamente factíveis para esse produtor, dada a tecnologia existente.

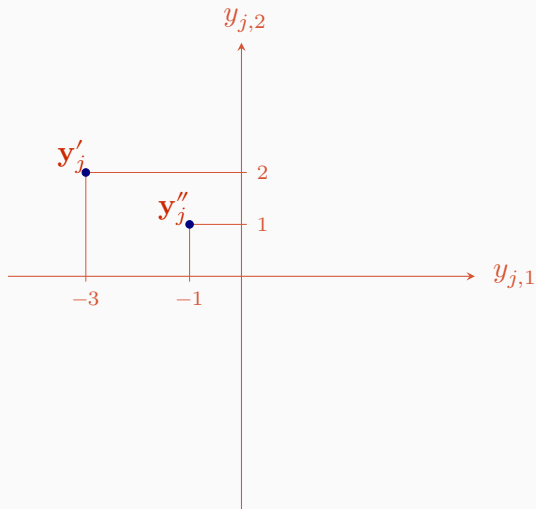
Exemplo com $\ell = 2$

Dois planos de produção

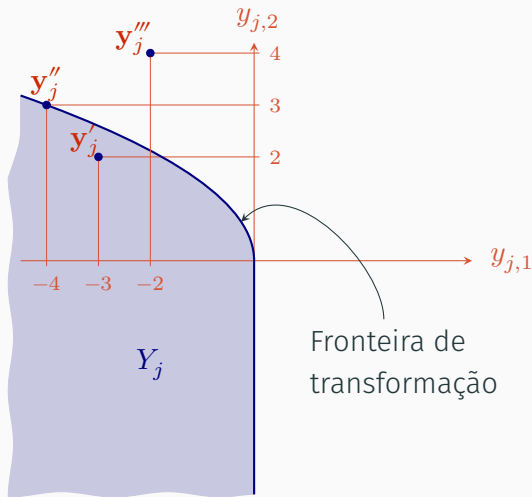


Exemplo com $\ell = 2$

Dois planos de produção

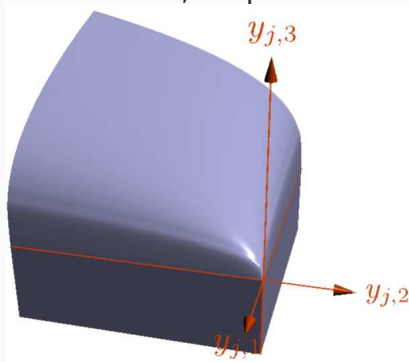


Um conjunto de produção



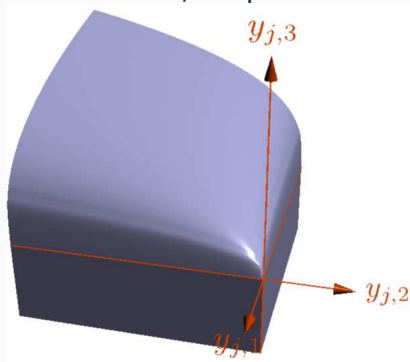
Exemplo, $\ell = 3$

Dois insumos, um produto

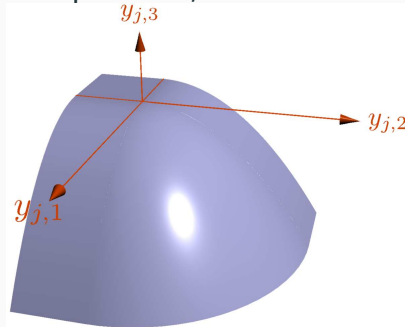


Exemplo, $\ell = 3$

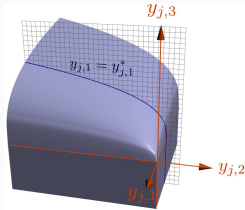
Dois insumos, um produto



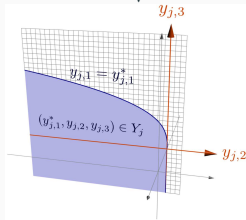
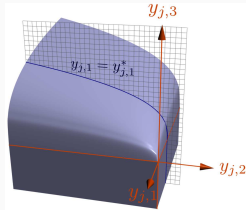
Dois produtos, um insumo



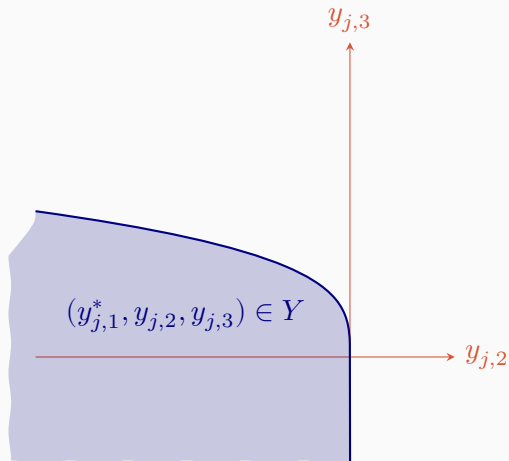
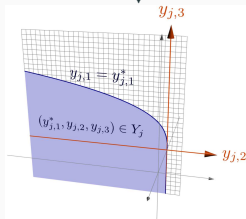
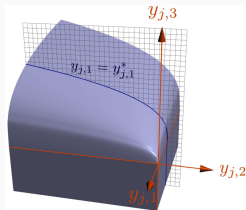
Corte paralelo ao plano $y_{2,j} \times y_{3,j}$ (1 produto 2 insumos)



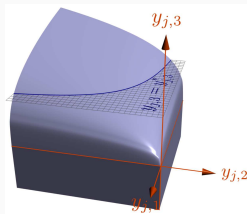
Corte paralelo ao plano $y_{2,j} \times y_{3,j}$ (1 produto 2 insumos)



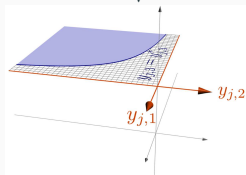
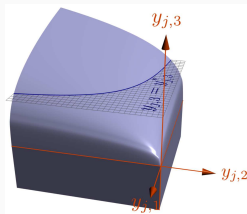
Corte paralelo ao plano $y_{2,j} \times y_{3,j}$ (1 produto 2 insumos)



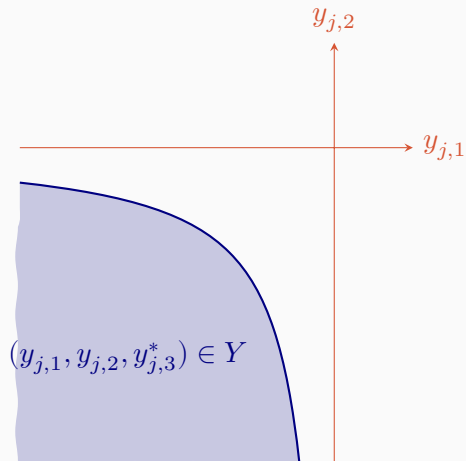
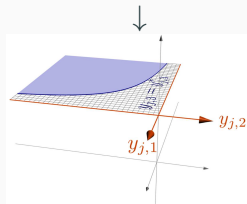
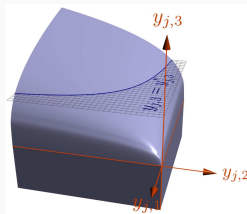
Corte paralelo ao plano $y_{1,j} \times y_{2,j}$ (1 produto 2 insumos)



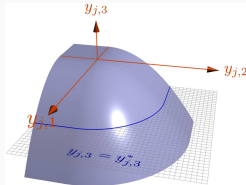
Corte paralelo ao plano $y_{1,j} \times y_{2,j}$ (1 produto 2 insumos)



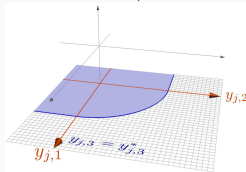
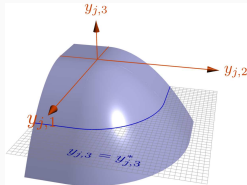
Corte paralelo ao plano $y_{1,j} \times y_{2,j}$ (1 produto 2 insumos)



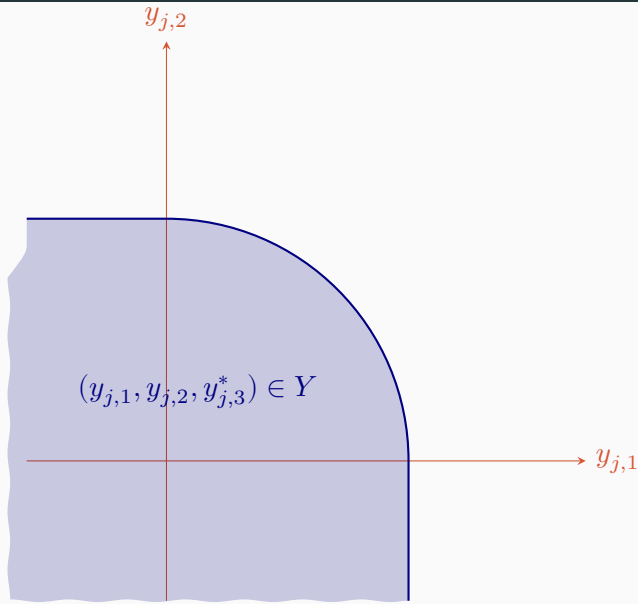
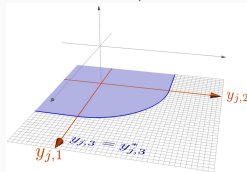
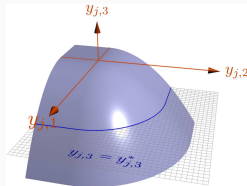
Corte paralelo ao plano $y_{2,j} \times y_{3,j}$ (2 produtos 1 insumo)



Corte paralelo ao plano $y_{2,j} \times y_{3,j}$ (2 produtos 1 insumo)



Corte paralelo ao plano $y_{2,j} \times y_{3,j}$ (2 produtos 1 insumo)



Função de transformação

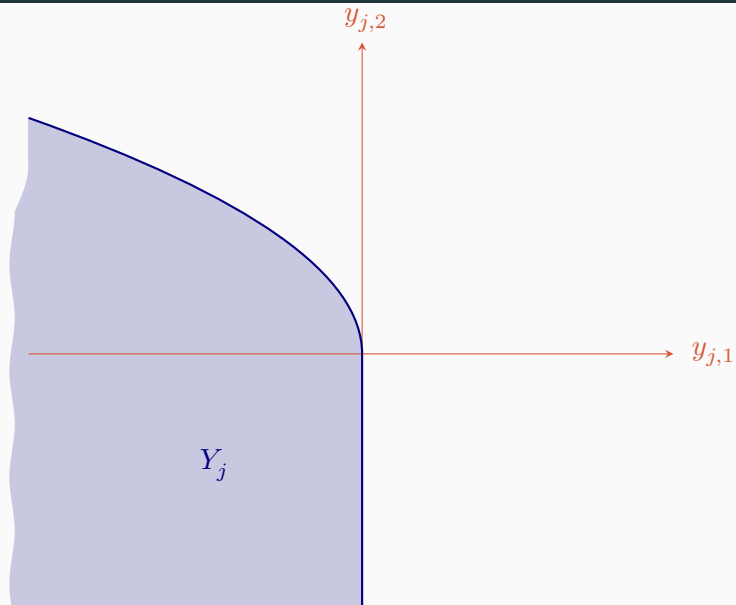
Uma função de transformação associada a um conjunto de produção $Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$ é uma função contínua $F_j : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^\ell$

$F_j(\mathbf{y}_j) = 0$ se, e somente se, $\mathbf{y}_j$ pertence à fronteira de Y_j ,

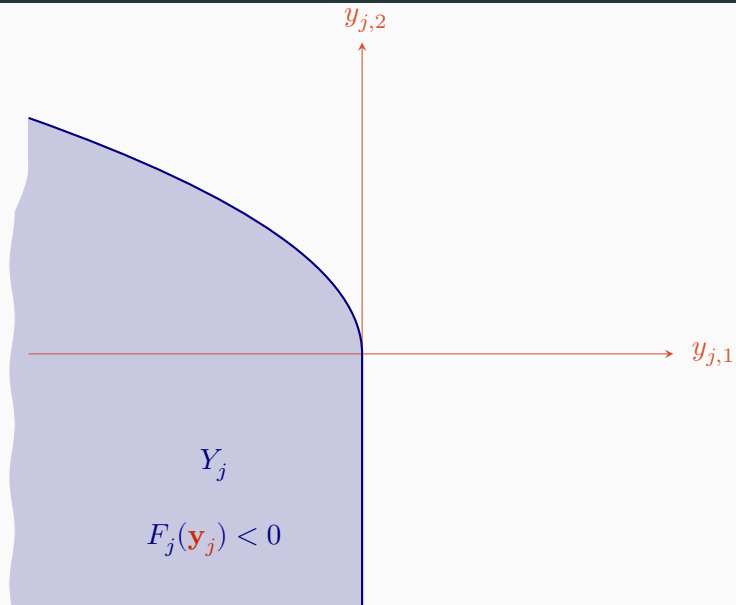
$F_j(\mathbf{y}_j) < 0$ se, e somente se, $\mathbf{y}_j$ é ponto interior de Y_j e

$F_j(\mathbf{y}_j) > 0$ se, e somente se, $\mathbf{y}_j$ é ponto exterior a Y_j .

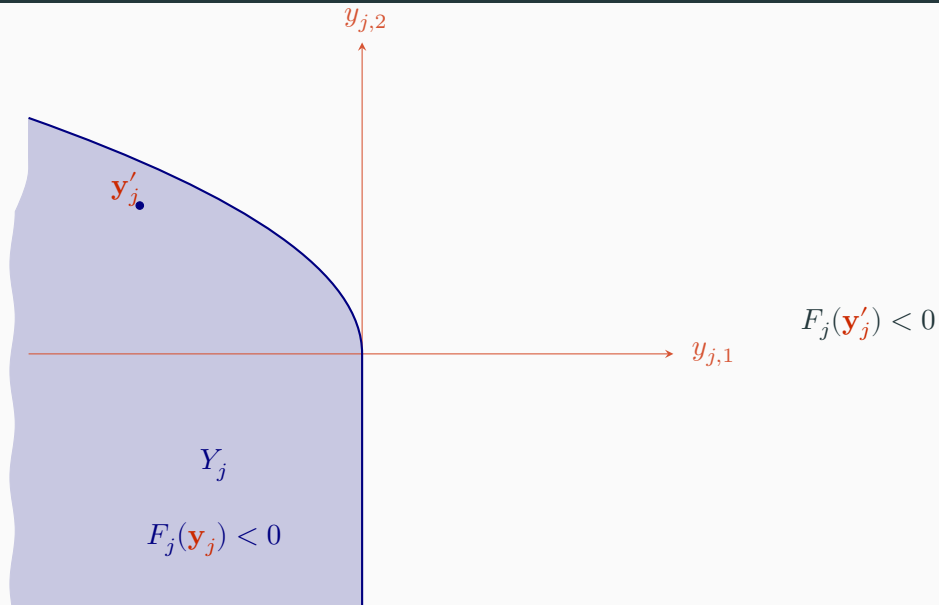
Função de transformação — ilustração, $\ell = 2$



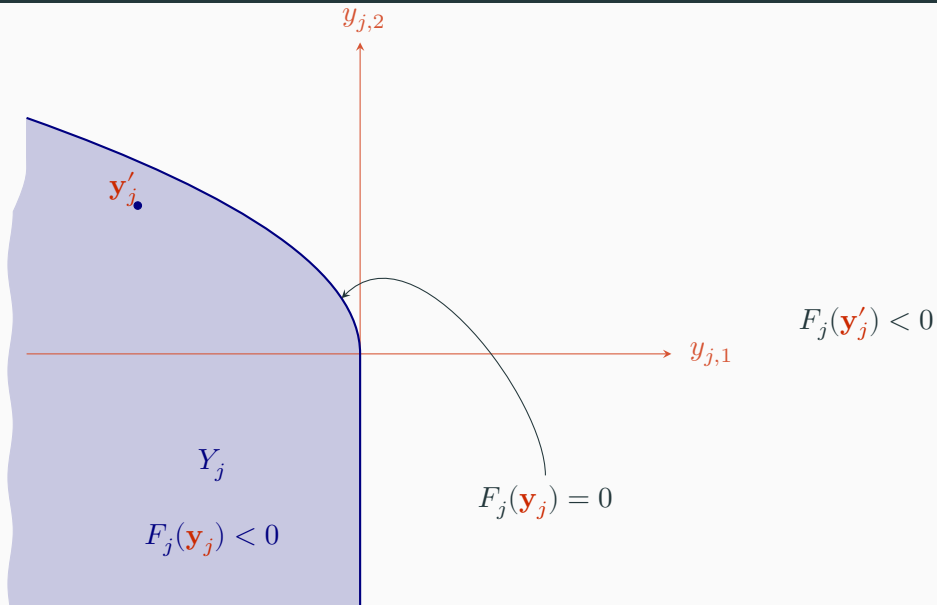
Função de transformação — ilustração, $\ell = 2$



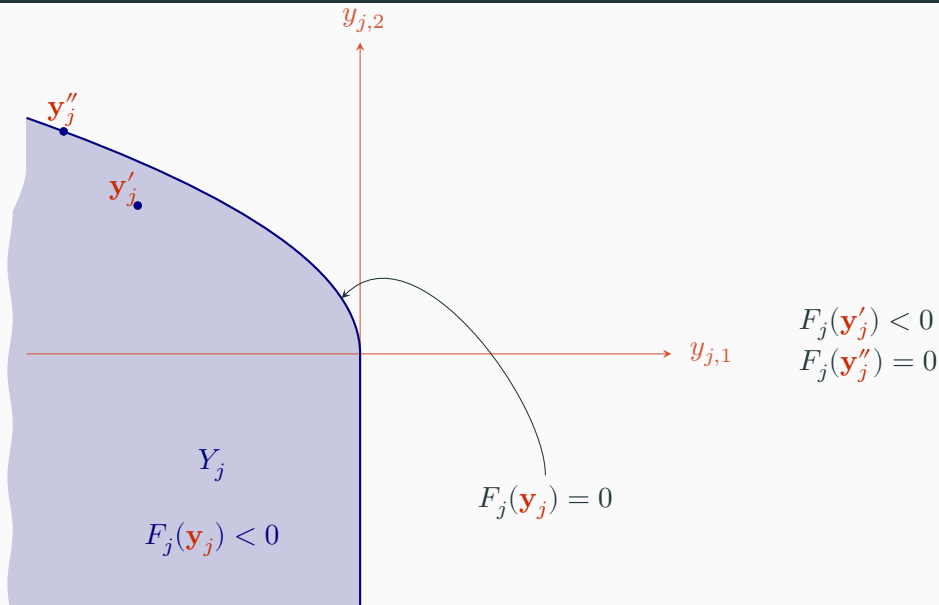
Função de transformação — ilustração, $\ell = 2$



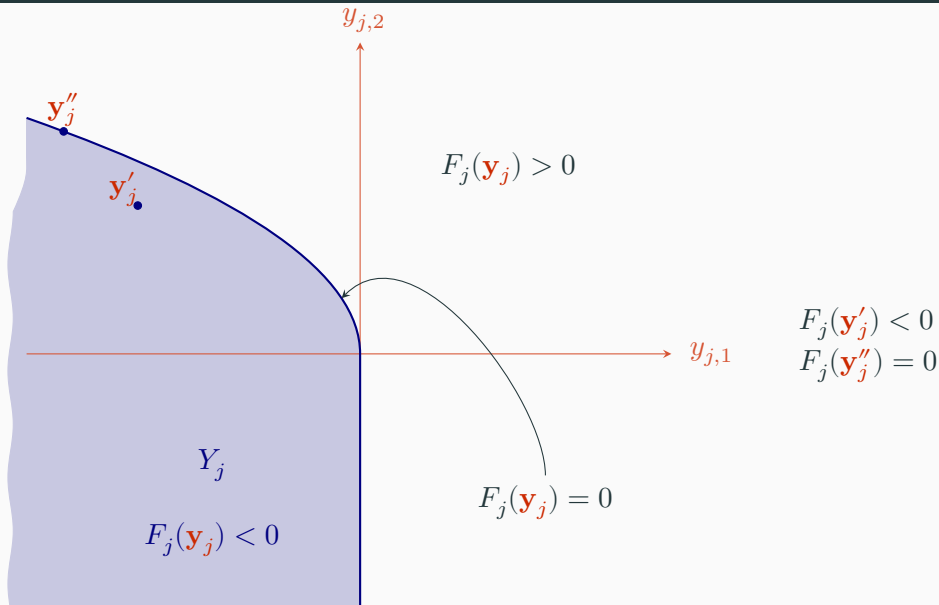
Função de transformação — ilustração, $\ell = 2$



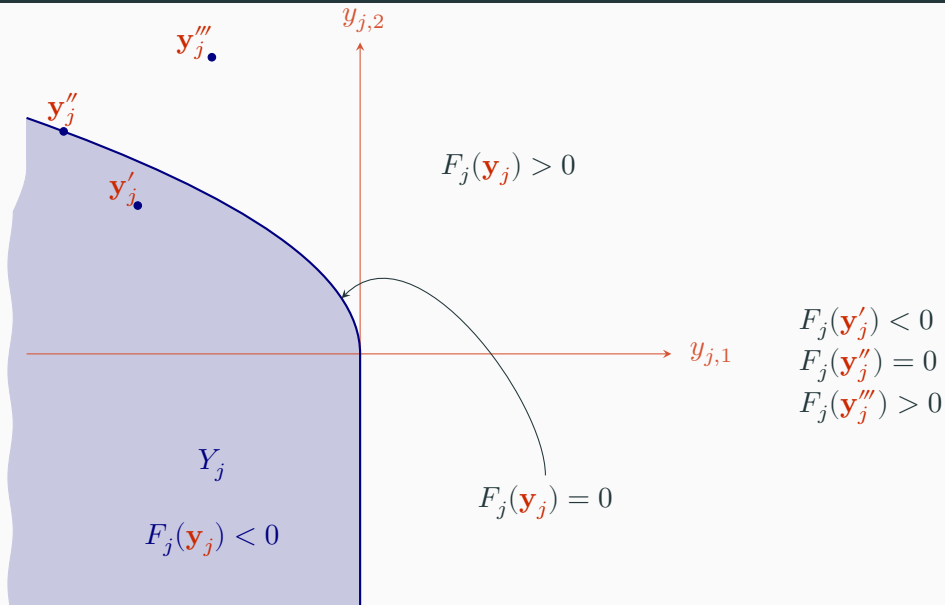
Função de transformação — ilustração, $\ell = 2$



Função de transformação — ilustração, $\ell = 2$



Função de transformação — ilustração, $\ell = 2$



Exemplo: $\ell = 2$

O conjunto de produção da ilustração anterior é

$$Y_j = \left\{ y_{j,1}, y_{j,2} \mid y_{j,1} \leq 0 \text{ e } y_{j,2} \leq \frac{3}{4} \sqrt{-y_{j,1}} \right\}$$

Tal conjunto de produção admite a seguinte função de transformação

$$F_j(y_{j,1}, y_{j,2}) = \max \left\{ y_{j,1}, - \left(y_{j,2}^2 + \frac{9}{4} y_{j,1} \right) \right\}$$

A taxa marginal de transformação

Em qualquer plano de produção sobre a fronteira de transformação, ou seja, para qualquer plano de produção $\mathbf{y}'_j$ tal que $F(\mathbf{y}'_j) = 0$, a taxa marginal de transformação entre os produtos $\tilde{h}$ e $\hat{h}$ é dada por

$$TMT_{j,\tilde{h},\hat{h}} = \frac{\partial F(\mathbf{y}'_j)/\partial \tilde{h}}{\partial F(\mathbf{y}'_j)/\partial \hat{h}}$$

A $TMT_{j,\tilde{h},\hat{h}}$ corresponde à inclinação da fronteira de transformação na fatia paralela ao plano $y_{j,\tilde{h}} \times y_{j,\hat{h}}$

Notação para comparação de vetores

Sejam $\mathbf{y}'_j, \mathbf{y}''_j \in \mathbb{R}^\ell$ então

$$\mathbf{y}'_j = \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} = y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \geq \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} \geq y''_{j,h}$$

Notação para comparação de vetores

Sejam $\mathbf{y}'_j, \mathbf{y}''_j \in \mathbb{R}^\ell$ então

$$\mathbf{y}'_j = \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} = y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \geq \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} \geq y''_{j,h}$$

Notação para comparação de vetores

Sejam $\mathbf{y}'_j, \mathbf{y}''_j \in \mathbb{R}^\ell$ então

$$\mathbf{y}'_j = \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} = y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \geq \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} \geq y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j > \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} \geq y''_{j,h} \text{ e } \exists h \in \{1, 2, \dots, \ell\} | y'_{j,h} > y''_{j,h}$$

Notação para comparação de vetores

Sejam $\mathbf{y}'_j, \mathbf{y}''_j \in \mathbb{R}^\ell$ então

$$\mathbf{y}'_j = \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} = y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \geq \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} \geq y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j > \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} \geq y''_{j,h} \text{ e } \exists h \in \{1, 2, \dots, \ell\} | y'_{j,h} > y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \gg \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} > y''_{j,h}$$

Notação para comparação de vetores

Sejam $\mathbf{y}'_j, \mathbf{y}''_j \in \mathbb{R}^\ell$ então

$$\mathbf{y}'_j = \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} = y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \geq \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} \geq y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j > \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} \geq y''_{j,h} \text{ e } \exists h \in \{1, 2, \dots, \ell\} | y'_{j,h} > y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \gg \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} > y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \leq \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} \leq y''_{j,h}$$

Notação para comparação de vetores

Sejam $\mathbf{y}'_j, \mathbf{y}''_j \in \mathbb{R}^\ell$ então

$$\mathbf{y}'_j = \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} = y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \geq \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} \geq y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j > \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} \geq y''_{j,h} \text{ e } \exists h \in \{1, 2, \dots, \ell\} | y'_{j,h} > y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \gg \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} > y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \leq \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} \leq y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j < \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} \leq y''_{j,h} \text{ e } \exists h \in \{1, 2, \dots, \ell\} | y'_{j,h} < y''_{j,h}$$

Notação para comparação de vetores

Sejam $\mathbf{y}'_j, \mathbf{y}''_j \in \mathbb{R}^\ell$ então

$$\mathbf{y}'_j = \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} = y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \geq \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} \geq y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j > \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} \geq y''_{j,h} \text{ e } \exists h \in \{1, 2, \dots, \ell\} | y'_{j,h} > y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \gg \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} > y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \leq \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} \leq y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j < \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} \leq y''_{j,h} \text{ e } \exists h \in \{1, 2, \dots, \ell\} | y'_{j,h} < y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \ll \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots, \ell\}, y'_{j,h} < y''_{j,h}$$

Um plano de produção $\mathbf{y}_j$ é dito **tecnicamente eficiente** em relação a um conjunto de produção Y_j caso

$$\mathbf{y}_j \in Y_j \text{ e } \nexists \mathbf{y}'_j \in Y_j \mid \mathbf{y}'_j > \mathbf{y}_j.$$

Todo plano de produção eficiente encontra-se na fronteira do conjunto de produção. Porém, nem todo plano de produção na fronteira do conjunto de produção é eficiente.

Rendimentos de escala

Dizemos que Y_j apresenta

Rendimentos constantes de escala caso, para todo $\alpha > 0$, $\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \alpha \mathbf{y}_j \in Y_j$

Rendimentos de escala

Dizemos que Y_j apresenta

Rendimentos constantes de escala caso, para todo $\alpha > 0$, $\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \alpha \mathbf{y}_j \in Y_j$

Rendimentos crescentes de escala caso, para todo $\alpha > 1$,

$$\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \exists \mathbf{y}'_j \in Y_j \mid \alpha \mathbf{y}'_j > \alpha \mathbf{y}_j$$

Rendimentos de escala

Dizemos que Y_j apresenta

Rendimentos constantes de escala caso, para todo $\alpha > 0$, $\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \alpha \mathbf{y}_j \in Y_j$

Rendimentos crescentes de escala caso, para todo $\alpha > 1$,

$$\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \exists \mathbf{y}'_j \in Y_j \mid \alpha \mathbf{y}'_j > \alpha \mathbf{y}_j$$

Rendimentos decrescentes de escala caso, para todo $0 < \alpha < 1$,

$$\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \exists \mathbf{y}'_j \in Y_j \mid \alpha \mathbf{y}'_j > \alpha \mathbf{y}_j$$

Rendimentos de escala

Dizemos que Y_j apresenta

Rendimentos constantes de escala caso, para todo $\alpha > 0$, $\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \alpha \mathbf{y}_j \in Y_j$

Rendimentos crescentes de escala caso, para todo $\alpha > 1$,

$$\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \exists \mathbf{y}'_j \in Y_j \mid \alpha \mathbf{y}'_j > \alpha \mathbf{y}_j$$

Rendimentos decrescentes de escala caso, para todo $0 < \alpha < 1$,

$$\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \exists \mathbf{y}'_j \in Y_j \mid \alpha \mathbf{y}'_j > \alpha \mathbf{y}_j$$

Rendimentos não crescentes de escala caso, para todo $0 < \alpha < 1$,

$$\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \exists \mathbf{y}'_j \in Y_j \mid \alpha \mathbf{y}'_j \geq \alpha \mathbf{y}_j$$

Rendimentos de escala

Dizemos que Y_j apresenta

Rendimentos constantes de escala caso, para todo $\alpha > 0$, $\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \alpha \mathbf{y}_j \in Y_j$

Rendimentos crescentes de escala caso, para todo $\alpha > 1$,

$$\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \exists \mathbf{y}'_j \in Y_j \mid \alpha \mathbf{y}'_j > \alpha \mathbf{y}_j$$

Rendimentos decrescentes de escala caso, para todo $0 < \alpha < 1$,

$$\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \exists \mathbf{y}'_j \in Y_j \mid \alpha \mathbf{y}'_j > \alpha \mathbf{y}_j$$

Rendimentos não crescentes de escala caso, para todo $0 < \alpha < 1$,

$$\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \exists \mathbf{y}'_j \in Y_j \mid \alpha \mathbf{y}'_j \geq \alpha \mathbf{y}_j$$

Rendimentos não decrescentes de escala caso, para todo $0 < \alpha < 1$,

$$\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \exists \mathbf{y}'_j \in Y_j \mid \alpha \mathbf{y}'_j \geq \alpha \mathbf{y}_j$$

Y_j é fechado

Hipóteses usuais

Y_j é fechado

Possibilidade de inatividade: $\mathbf{0} \in Y_j$.

Hipóteses usuais

Y_j é fechado

Possibilidade de inatividade: $\mathbf{0} \in Y_j$.

No free lunch: $Y_j \cap \mathbb{R}_+^\ell \subset \{\mathbf{0}\}$

Hipóteses usuais

Y_j é fechado

Possibilidade de inatividade: $\mathbf{0} \in Y_j$.

No free lunch: $Y_j \cap \mathbb{R}_+^\ell \subset \{\mathbf{0}\}$

Livre descarte (*free disposal*): $\mathbf{y}_j \in Y_j$ e $\mathbf{y}'_j < \mathbf{y}_j \Rightarrow \mathbf{y}'_j \in Y_j$

Hipóteses usuais

Y_j é fechado

Possibilidade de inatividade: $\mathbf{0} \in Y_j$.

No free lunch: $Y_j \cap \mathbb{R}_+^\ell \subset \{\mathbf{0}\}$

Livre descarte (*free disposal*): $\mathbf{y}_j \in Y_j$ e $\mathbf{y}'_j < \mathbf{y}_j \Rightarrow \mathbf{y}'_j \in Y_j$

Irreversibilidade: $Y_j \cap -Y_j \subset \{\mathbf{0}\}$

Hipóteses usuais

Y_j é fechado

Possibilidade de inatividade: $\mathbf{0} \in Y_j$.

No free lunch: $Y_j \cap \mathbb{R}_+^\ell \subset \{\mathbf{0}\}$

Livre descarte (*free disposal*): $\mathbf{y}_j \in Y_j$ e $\mathbf{y}'_j < \mathbf{y}_j \Rightarrow \mathbf{y}'_j \in Y_j$

Irreversibilidade: $Y_j \cap -Y_j \subset \{\mathbf{0}\}$

Replicabilidade: $\mathbf{y}_j \in Y_j, t \in \mathbb{N} \Rightarrow t\mathbf{y}_j \in Y_j$

Hipóteses usuais

Y_j é fechado

Possibilidade de inatividade: $\mathbf{0} \in Y_j$.

No free lunch: $Y_j \cap \mathbb{R}_+^\ell \subset \{\mathbf{0}\}$

Livre descarte (*free disposal*): $\mathbf{y}_j \in Y_j$ e $\mathbf{y}'_j < \mathbf{y}_j \Rightarrow \mathbf{y}'_j \in Y_j$

Irreversibilidade: $Y_j \cap -Y_j \subset \{\mathbf{0}\}$

Replicabilidade: $\mathbf{y}_j \in Y_j, t \in \mathbb{N} \Rightarrow t\mathbf{y}_j \in Y_j$

Divisibilidade: $\mathbf{y}_j \in Y_j, 0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha\mathbf{y}_j \in Y_j$

Hipóteses usuais

Y_j é fechado

Possibilidade de inatividade: $\mathbf{0} \in Y_j$.

No free lunch: $Y_j \cap \mathbb{R}_+^\ell \subset \{\mathbf{0}\}$

Livre descarte (*free disposal*): $\mathbf{y}_j \in Y_j$ e $\mathbf{y}'_j < \mathbf{y}_j \Rightarrow \mathbf{y}'_j \in Y_j$

Irreversibilidade: $Y_j \cap -Y_j \subset \{\mathbf{0}\}$

Replicabilidade: $\mathbf{y}_j \in Y_j, t \in \mathbb{N} \Rightarrow t\mathbf{y}_j \in Y_j$

Divisibilidade: $\mathbf{y}_j \in Y_j, 0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha\mathbf{y}_j \in Y_j$

Aditividade: $\mathbf{y}_j, \mathbf{y}'_j \in Y_j \Rightarrow \mathbf{y}_j + \mathbf{y}'_j \in Y_j$

Hipóteses usuais

Y_j é fechado

Possibilidade de inatividade: $\mathbf{0} \in Y_j$.

No free lunch: $Y_j \cap \mathbb{R}_+^\ell \subset \{\mathbf{0}\}$

Livre descarte (*free disposal*): $\mathbf{y}_j \in Y_j$ e $\mathbf{y}'_j < \mathbf{y}_j \Rightarrow \mathbf{y}'_j \in Y_j$

Irreversibilidade: $Y_j \cap -Y_j \subset \{\mathbf{0}\}$

Replicabilidade: $\mathbf{y}_j \in Y_j, t \in \mathbb{N} \Rightarrow t\mathbf{y}_j \in Y_j$

Divisibilidade: $\mathbf{y}_j \in Y_j, 0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha\mathbf{y}_j \in Y_j$

Aditividade: $\mathbf{y}_j, \mathbf{y}'_j \in Y_j \Rightarrow \mathbf{y}_j + \mathbf{y}'_j \in Y_j$

Convexidade $\mathbf{y}_j, \mathbf{y}'_j \in Y_j, 0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha\mathbf{y}_j + (1 - \alpha)\mathbf{y}'_j \in Y_j$

Neutralidade de escopo

Assuma as hipóteses de possibilidade de inatividade e de *no free lunch* e, para cada bem h , defina o conjunto

$$Y_j^h = \{\mathbf{y}_j \in Y_j \mid y_{j,h} \geq 0, \tilde{h} \neq h \Rightarrow y_{j,\tilde{h}} \leq 0\}$$

Diremos que Y_j apresenta **neutralidade de escopo**, caso, para qualquer $\mathbf{y}_j \in Y_j$, existam $\mathbf{y}_j^1 \in Y_j^1, \mathbf{y}_j^2 \in Y_j^2, \dots, \mathbf{y}_j^\ell \in Y_j^\ell$ tais que

$$\mathbf{y}_j^1 + \mathbf{y}_j^2 + \dots + \mathbf{y}_j^\ell = \mathbf{y}_j$$

e, para quaisquer $\mathbf{y}_j^1 \in Y_j^1, \mathbf{y}_j^2 \in Y_j^2, \dots, \mathbf{y}_j^\ell \in Y_j^\ell$

$$\mathbf{y}_j^1 + \mathbf{y}_j^2 + \dots + \mathbf{y}_j^\ell \in Y_j$$

Neutralidade de escopo — exemplo

Suponha $\ell = 3$ e a seguinte função de transformação

$$F(y_{j,1}, y_{j,2}, y_{j,3}) = y_{j,1} + \max\{0, y_{j,2}\}^2 + \max\{0, y_{j,3}\}^2$$

O conjunto de produção associado é

$$Y_j = \left\{ y_{j,1}, y_{j,2}, y_{j,3} \mid y_{j,1} \leq -\max\{0, y_{j,2}\}^2 - \max\{0, y_{j,3}\}^2 \right\}$$

E os conjuntos com produção de apenas um bem são

$$\begin{aligned} Y_j^0 &= \{0, y_{j,2}, y_{j,3} \mid y_{j,2} \leq 0, y_{j,3} \leq 0\} \\ Y_j^2 &= \{y_{j,1}, y_{j,2}, y_{j,3} \mid y_{j,1} \leq -\max\{0, y_{j,2}\}^2, y_{j,3} \leq 0\} \\ Y_j^3 &= \{y_{j,1}, y_{j,2}, y_{j,3} \mid y_{j,1} \leq -\max\{0, y_{j,3}\}^2, y_{j,2} \leq 0\} \end{aligned}$$

Mostre que esse conjunto de produção apresenta neutralidade de escopo

Mostre que o conjunto de produção definido pela função de transformação

$$F_j(y_{j,1}, y_{j,2}, y_{j,3}) = -\min\{0, y_{j,1}\}^2 + \max\{0, y_{j,2}\}^2 + \max\{0, y_{j,3}\}^2$$

Não apresenta neutralidade de escopo.

Assuma que o conjunto de produção de um produtor j qualquer apresente neutralidade de escopo. Nesse, caso, podemos definir para cada bem h para o qual há possibilidade de produção líquida positiva a função $f_{j,h} : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_{j,h}(\mathbf{z}_{j,h}) = \max \{q - z_{j,h,h} \mid -\mathbf{z}_{j,h} + \mathbf{a}_h \in Y_j^h\}$$

em que $\mathbf{a}_h$ é um vetor com todos os componentes nulos à exceção do h -ésimo componente que deve ser igual a q ,

Exemplo

Se a função de transformação do produtor j é

$$F(y_{j,1}, y_{j,2}, y_{j,2}) = y_{j,1} + \max \{0, y_{j,2}\}^2 + \max \{0, y_{j,3}\}^2,$$

A função de produção de produção do bem 2 será

Exemplo

Se a função de transformação do produtor j é

$$F(y_{j,1}, y_{j,2}, y_{j,2}) = y_{j,1} + \max \{0, y_{j,2}\}^2 + \max \{0, y_{j,3}\}^2,$$

A função de produção de produção do bem 2 será

$$f_{j,2}(z_{j,2,1}, z_{j,2,2}, z_{j,2,3}) = \sqrt{z_{j,2,1}}$$

Exemplo

Se a função de transformação do produtor j é

$$F(y_{j,1}, y_{j,2}, y_{j,2}) = y_{j,1} + \max \{0, y_{j,2}\}^2 + \max \{0, y_{j,3}\}^2,$$

A função de produção de produção do bem 2 será

$$f_{j,2}(z_{j,2,1}, z_{j,2,2}, z_{j,2,3}) = \sqrt{z_{j,2,1}}$$

E a função de produção do bem 3 será

$$f_{j,3}(z_{j,3,1}, z_{j,3,2}, z_{j,3,3}) = \sqrt{z_{j,3,1}}$$

No que se segue, eliminaremos os subscritos da função de produção e do vetor de insumos.

Função de produção e hipóteses sobre produção

Inatividade: $\mathbf{0}$ pertence ao domínio de f e $\mathbf{0} \geq 0$;

Função de produção e hipóteses sobre produção

Inatividade: $\mathbf{0}$ pertence ao domínio de f e $\mathbf{0} \geq 0$;

No free lunch: $f(\mathbf{0}) \leq 0$;

Função de produção e hipóteses sobre produção

Inatividade: $\mathbf{0}$ pertence ao domínio de f e $\mathbf{0} \geq 0$;

No free lunch: $f(\mathbf{0}) \leq 0$;

Livre descarte: $\mathbf{z}' \geq \mathbf{z}'' \Rightarrow f(\mathbf{z}') \geq f(\mathbf{z}'')$;

Função de produção e hipóteses sobre produção

Inatividade: $\mathbf{0}$ pertence ao domínio de f e $\mathbf{0} \geq 0$;

No free lunch: $f(\mathbf{0}) \leq 0$;

Livre descarte: $\mathbf{z}' \geq \mathbf{z}'' \Rightarrow f(\mathbf{z}') \geq f(\mathbf{z}'')$;

Replicabilidade: $\forall t \in \mathbb{N}, f(t\mathbf{z}) \geq tf(\mathbf{z})$;

Função de produção e hipóteses sobre produção

Inatividade: $\mathbf{0}$ pertence ao domínio de f e $\mathbf{0} \geq \mathbf{0}$;

No free lunch: $f(\mathbf{0}) \leq \mathbf{0}$;

Livre descarte: $\mathbf{z}' \geq \mathbf{z}'' \Rightarrow f(\mathbf{z}') \geq f(\mathbf{z}'')$;

Replicabilidade: $\forall t \in \mathbb{N}, f(t\mathbf{z}) \geq tf(\mathbf{z})$;

Divisibilidade : $0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow f(\alpha\mathbf{z}) \geq \alpha f(\mathbf{z})$

Função de produção e hipóteses sobre produção

Inatividade: $\mathbf{0}$ pertence ao domínio de f e $\mathbf{0} \geq \mathbf{0}$;

No free lunch: $f(\mathbf{0}) \leq 0$;

Livre descarte: $\mathbf{z}' \geq \mathbf{z}'' \Rightarrow f(\mathbf{z}') \geq f(\mathbf{z}'')$;

Replicabilidade: $\forall t \in \mathbb{N}, f(t\mathbf{z}) \geq tf(\mathbf{z})$;

Divisibilidade : $0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow f(\alpha\mathbf{z}) \geq \alpha f(\mathbf{z})$

Aditividade: $f(\mathbf{z}' + \mathbf{z}'') \geq f(\mathbf{z}') + f(\mathbf{z}'')$;

Função de produção e hipóteses sobre produção

Inatividade: $\mathbf{0}$ pertence ao domínio de f e $\mathbf{0} \geq 0$;

No free lunch: $f(\mathbf{0}) \leq 0$;

Livre descarte: $\mathbf{z}' \geq \mathbf{z}'' \Rightarrow f(\mathbf{z}') \geq f(\mathbf{z}'')$;

Replicabilidade: $\forall t \in \mathbb{N}, f(t\mathbf{z}) \geq tf(\mathbf{z})$;

Divisibilidade : $0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow f(\alpha\mathbf{z}) \geq \alpha f(\mathbf{z})$

Aditividade: $f(\mathbf{z}' + \mathbf{z}'') \geq f(\mathbf{z}') + f(\mathbf{z}'')$;

Rendimentos não crescentes de escala: $\forall \alpha > 0, [f(\alpha\mathbf{z}) - \alpha f(\mathbf{z})] / (1 - \alpha) \geq 0$

Função de produção e hipóteses sobre produção

Inatividade: $\mathbf{0}$ pertence ao domínio de f e $\mathbf{0} \geq \mathbf{0}$;

No free lunch: $f(\mathbf{0}) \leq 0$;

Livre descarte: $\mathbf{z}' \geq \mathbf{z}'' \Rightarrow f(\mathbf{z}') \geq f(\mathbf{z}'')$;

Replicabilidade: $\forall t \in \mathbb{N}, f(t\mathbf{z}) \geq tf(\mathbf{z})$;

Divisibilidade : $0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow f(\alpha\mathbf{z}) \geq \alpha f(\mathbf{z})$

Aditividade: $f(\mathbf{z}' + \mathbf{z}'') \geq f(\mathbf{z}') + f(\mathbf{z}'')$;

Rendimentos não crescentes de escala: $\forall \alpha > 0, [f(\alpha\mathbf{z}) - \alpha f(\mathbf{z})] / (1 - \alpha) \geq 0$

Rendimentos não decrescentes de escala: $\forall \alpha > 0, [f(\alpha\mathbf{z}) - \alpha f(\mathbf{z})] / (1 - \alpha) \leq 0$

Função de produção e hipóteses sobre produção

Inatividade: $\mathbf{0}$ pertence ao domínio de f e $\mathbf{0} \geq \mathbf{0}$;

No free lunch: $f(\mathbf{0}) \leq \mathbf{0}$;

Livre descarte: $\mathbf{z}' \geq \mathbf{z}'' \Rightarrow f(\mathbf{z}') \geq f(\mathbf{z}'')$;

Replicabilidade: $\forall t \in \mathbb{N}, f(t\mathbf{z}) \geq tf(\mathbf{z})$;

Divisibilidade : $0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow f(\alpha\mathbf{z}) \geq \alpha f(\mathbf{z})$

Aditividade: $f(\mathbf{z}' + \mathbf{z}'') \geq f(\mathbf{z}') + f(\mathbf{z}'')$;

Rendimentos não crescentes de escala: $\forall \alpha > 0, [f(\alpha\mathbf{z}) - \alpha f(\mathbf{z})] / (1 - \alpha) \geq 0$

Rendimentos não decrescentes de escala: $\forall \alpha > 0, [f(\alpha\mathbf{z}) - \alpha f(\mathbf{z})] / (1 - \alpha) \leq 0$

Convexidade da conjunto de produção: A função de produção é côncava:

$$\forall 0 \leq \alpha \leq 1, f[\alpha\mathbf{z}' + (1 - \alpha)\mathbf{z}''] \geq \alpha f(\mathbf{z}') + (1 - \alpha)f(\mathbf{z}'')$$

Produtividade média

$$PMe_h = \frac{f(\mathbf{z})}{z_h}$$

Sinônimos: produto médio, rendimento médio.

Produtividade média

$$PMe_h = \frac{f(\mathbf{z})}{z_h}$$

Sinônimos: produto médio, rendimento médio.

Produtividade marginal

$$PMg_h = \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h}$$

Sinônimos: produto marginal, rendimento marginal.

Exemplo: função Cobb-Douglas

$$f(\mathbf{z}) = A \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h} , \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{\ell} \geq 0$$

Exemplo: função Cobb-Douglas

$$f(\mathbf{z}) = A \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{\ell} \geq 0$$

$$PMe_{\tilde{h}} = \frac{A}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}$$

Exemplo: função Cobb-Douglas

$$f(\mathbf{z}) = A \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{\ell} \geq 0$$

$$PM e_{\tilde{h}} = \frac{A}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}$$

$$PM g_{\tilde{h}} = A \frac{\alpha_{\tilde{h}}}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}$$

Exemplo: função CES

$$f(\mathbf{z}) = A \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma}{\rho}}, \quad a_1, \dots, a_{\ell} > 0, \sum_{h=1}^{\ell} a_h = 1, \gamma > 0.$$

Exemplo: função CES

$$f(\mathbf{z}) = A \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma}{\rho}}, \quad a_1, \dots, a_{\ell} > 0, \sum_{h=1}^{\ell} a_h = 1, \gamma > 0.$$

$$PMe_{\tilde{h}} = \frac{A}{z_{\tilde{h}}} \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma}{\rho}}$$

Exemplo: função CES

$$f(\mathbf{z}) = A \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma}{\rho}}, \quad a_1, \dots, a_{\ell} > 0, \sum_{h=1}^{\ell} a_h = 1, \gamma > 0.$$

$$PM e_{\tilde{h}} = \frac{A}{z_{\tilde{h}}} \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma}{\rho}}$$

$$PM g_{\tilde{h}} = \gamma a_{\tilde{h}} z_{\tilde{h}}^{\rho-1} \left[A \sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma-\rho}{\rho}}$$

Produtividades média e marginal — interpretação gráfica

$$\eta = \left. \frac{df(\alpha \mathbf{z})}{d\alpha} \frac{\alpha}{f(\alpha \mathbf{z})} \right|_{\alpha=1}$$

$$\eta = \sum_{h=1}^{\ell} \frac{z_h}{f(\mathbf{z})} \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h}$$

$$\eta = \left. \frac{df(\alpha \mathbf{z})}{d\alpha} \frac{\alpha}{f(\alpha \mathbf{z})} \right|_{\alpha=1}$$
$$\eta = \sum_{h=1}^{\ell} \frac{z_h}{f(\mathbf{z})} \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h} = \sum_{h=1}^{\ell} \frac{PMg_h}{PMe_h}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{f(\alpha \mathbf{z}) - \alpha f(\mathbf{z})}{(1 - \alpha)} &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left[f(\mathbf{z}) - \sum_{h=1}^h z_h \frac{\partial f(\alpha \mathbf{z})}{\partial z_h} \right] = f(\mathbf{z}) - \sum_{h=1}^h z_h \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h} \\ &= f(\mathbf{z}) \left[1 - \sum_{h=1}^h \frac{z_h}{f(\mathbf{z})} \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h} \right] = f(\mathbf{z}) [1 - \eta]\end{aligned}$$

Logo a função de produção apresenta localmente rendimentos crescentes de escala caso $\eta > 1$, rendimentos constantes de escala caso $\eta = 1$ e rendimentos decrescentes de escala caso $\eta < 1$.

Exemplo: função Cobb-Douglas

$$f(\mathbf{z}) = A \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{\ell} \geq 0$$

$$PM e_{\tilde{h}} = \frac{A}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}$$

$$PM g_{\tilde{h}} = A \frac{\alpha_{\tilde{h}}}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}$$

Exemplo: função Cobb-Douglas

$$f(\mathbf{z}) = A \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{\ell} \geq 0$$

$$PM e_{\tilde{h}} = \frac{A}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}$$

$$PM g_{\tilde{h}} = A \frac{\alpha_{\tilde{h}}}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}$$

$$\eta = \sum_{\tilde{h}=1}^{\ell} \frac{A \frac{\alpha_{\tilde{h}}}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}}{\frac{A}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}}$$

Exemplo: função Cobb-Douglas

$$f(\mathbf{z}) = A \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{\ell} \geq 0$$

$$PM e_{\tilde{h}} = \frac{A}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}$$

$$PM g_{\tilde{h}} = A \frac{\alpha_{\tilde{h}}}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}$$

$$\eta = \sum_{\tilde{h}=1}^{\ell} \frac{A \frac{\alpha_{\tilde{h}}}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}}{\frac{A}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} z_h^{\alpha_h}} = \sum_{h=1}^{\ell} \alpha_{\tilde{h}}$$

Exemplo: função CES

$$f(\mathbf{z}) = A \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma}{\rho}}, \quad a_1, \dots, a_{\ell} > 0, \sum_{h=1}^{\ell} a_h = 1, \gamma > 0.$$

$$PM e_{\tilde{h}} = \frac{A}{z_{\tilde{h}}} \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma}{\rho}}$$

$$PM g_{\tilde{h}} = A \gamma a_{\tilde{h}} z_{\tilde{h}}^{\rho-1} \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma-\rho}{\rho}}$$

Exemplo: função CES

$$f(\mathbf{z}) = A \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma}{\rho}}, \quad a_1, \dots, a_{\ell} > 0, \sum_{h=1}^{\ell} a_h = 1, \gamma > 0.$$

$$PMe_{\tilde{h}} = \frac{A}{z_{\tilde{h}}} \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma}{\rho}}$$

$$PMg_{\tilde{h}} = A\gamma a_{\tilde{h}} z_{\tilde{h}}^{\rho-1} \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma-\rho}{\rho}}$$

$$\eta = \sum_{\tilde{h}=1}^{\ell} \frac{A\gamma a_{\tilde{h}} z_{\tilde{h}}^{\rho-1} \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma-\rho}{\rho}}}{\frac{A}{z_{\tilde{h}}} \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma}{\rho}}}$$

Exemplo: função CES

$$f(\mathbf{z}) = A \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma}{\rho}}, \quad a_1, \dots, a_{\ell} > 0, \sum_{h=1}^{\ell} a_h = 1, \gamma > 0.$$

$$PMe_{\tilde{h}} = \frac{A}{z_{\tilde{h}}} \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma}{\rho}}$$

$$PMg_{\tilde{h}} = A\gamma a_{\tilde{h}} z_{\tilde{h}}^{\rho-1} \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma-\rho}{\rho}}$$

$$\eta = \sum_{\tilde{h}=1}^{\ell} \frac{A\gamma a_{\tilde{h}} z_{\tilde{h}}^{\rho-1} \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma-\rho}{\rho}}}{\frac{A}{z_{\tilde{h}}} \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma}{\rho}}} = \gamma \frac{\sum_{\tilde{h}=1}^{\ell} a_{\tilde{h}} z_{\tilde{h}}^{\rho}}{\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho}}$$

Exemplo: função CES

$$f(\mathbf{z}) = A \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma}{\rho}}, \quad a_1, \dots, a_{\ell} > 0, \sum_{h=1}^{\ell} a_h = 1, \gamma > 0.$$

$$PMe_{\tilde{h}} = \frac{A}{z_{\tilde{h}}} \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma}{\rho}}$$

$$PMg_{\tilde{h}} = A\gamma a_{\tilde{h}} z_{\tilde{h}}^{\rho-1} \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma-\rho}{\rho}}$$

$$\eta = \sum_{\tilde{h}=1}^{\ell} \frac{A\gamma a_{\tilde{h}} z_{\tilde{h}}^{\rho-1} \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma-\rho}{\rho}}}{\frac{A}{z_{\tilde{h}}} \left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho} \right]^{\frac{\gamma}{\rho}}} = \gamma \frac{\sum_{\tilde{h}=1}^{\ell} a_{\tilde{h}} z_{\tilde{h}}^{\rho}}{\sum_{h=1}^{\ell} a_h z_h^{\rho}} = \gamma$$

Exemplo

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{h=1}^{\ell} \ln(\mathbf{z}_h + 1)$$
$$PMe_{\tilde{h}} = \frac{\sum_{h=1}^{\ell} \ln(\mathbf{z}_h + 1)}{z_{\tilde{h}}}$$

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{h=1}^{\ell} \ln(\mathbf{z}_h + 1)$$

$$PM e_{\tilde{h}} = \frac{\sum_{h=1}^{\ell} \ln(\mathbf{z}_h + 1)}{z_{\tilde{h}}}$$

$$PM g_{\tilde{h}} = \frac{1}{z_{\tilde{h}} + 1}$$

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{h=1}^{\ell} \ln(\mathbf{z}_h + 1)$$

$$PM e_{\tilde{h}} = \frac{\sum_{h=1}^{\ell} \ln(\mathbf{z}_h + 1)}{z_{\tilde{h}}}$$

$$PM g_{\tilde{h}} = \frac{1}{z_{\tilde{h}} + 1}$$

$$\eta = \frac{\sum_{h=1}^{\ell} \frac{z_h}{z_h + 1}}{\sum_{h=1}^{\ell} \ln(z_h + 1)}$$