# Maximização de Lucro

Roberto Guena

15 de maio de 2025

# Firmas

Assumiremos que os produtores sejam firmas. Cada firma possui um ou mais proprietários ou sócios. Assuma que cada firma considera os preços da economia, $\mathbf{p} = p_1, p_2, \ldots, p_\ell$, como parâmetros dados que ela não consegue alterar.
Se a firma $j$ escolhe o vetor de produção líquida $\mathbf{y}_j$, seu lucro será

$$\pi_j = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j = p_1 y_{j,1} + p_2 y_{j,2} + \cdots + p_\ell y_{j,\ell}$$

A cada consumidor $i$, é atribuída uma participação $s_{i,j} \geq 0$ no lucro da firma $j$, sendo $\sum_{i=1}^{m} s_{i,j} = 1$ (se o consumidor $i$ não é sócio da firma $j$, $s_{i,j} = 0$). Desse modo, a restrição orçamentária de um sócio da firma $j$ será dada por

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i = m_i + s_{i,j} \pi_j.$$

Na qual $m_i$ é a renda desse consumidor proveniente de outras fontes que não sua participação no lucro da firma. Evidentemente, é do interesse de cada sócio que o lucro da firma seja o maior possível.

# O problema de maximização de lucro

Escolher $\mathbf{y}_j$ de modo a maximizar

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j$$

dada a restrição

$$F_j(\mathbf{y}_j) \leq 0.$$

A função de Lagrange associada a esse problema é

$$\mathcal{L} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j - \lambda F_j(\mathbf{y}_j).$$

A solução ótima, deve atender às condições de primeira ordem

$$F_j(\mathbf{y}_j) = 0$$

e

$$p_h - \lambda \frac{\partial F_{j(\mathbf{y}_j)}}{\partial y_{j,h}} = 0, \quad h = 1, \ldots, \ell$$

# Interpretação das condições de primeira ordem

$$\left.\begin{array}{l} p_{\tilde{h}} - \lambda^* \dfrac{\partial F_j(\mathbf{y}_j^*)}{\partial y_{j,\tilde{h}}} = 0 \Rightarrow p_{\tilde{h}} = \lambda^* \dfrac{\partial F_j(\mathbf{y}_j^*)}{\partial y_{j,\tilde{h}}} \\ p_{\hat{h}} - \lambda^* \dfrac{\partial F_j(\mathbf{y}_j^*)}{\partial y_{j,\hat{h}}} = 0 \Rightarrow p_{\hat{h}} = \lambda^* \dfrac{\partial F_j(\mathbf{y}_j^*)}{\partial y_{j,\hat{h}}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p_{\tilde{h}}}{p_{\hat{h}}} = \frac{\frac{\partial F_j(\mathbf{y}_j^*)}{\partial y_{j,\tilde{h}}}}{\frac{\partial F_j(\mathbf{y}_j^*)}{\partial y_{j,\hat{h}}}} = TMT_{\tilde{h},\hat{h}}$$

A produção de lucro máximo é um ponto sobre a fronteira de transformação no qual, caso a $TMT$ entre dois bens seja definida, a razão entre os preços desses dois bens é igual à taxa marginal de transformação entre esses dois bens.

# Funções de oferta líquida e de lucro

Seja $\mathbf{y}_j(\mathbf{p})$ a função que retorna o vetor de produção líquida que maximiza o lucro da firma $j$. Chamamos essa função de função de oferta líquida da firma $j$, e o $h$-ésimo componente do resultado dessa função, $y^*_{j,h}(\mathbf{p})$, de função de oferta líquida do bem $h$, $h = 1, \ldots, \ell$.

A função que retorna o lucro máximo da firma $j$, dada por

$$\pi^*(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^*_j(\mathbf{p}),$$

é chamada função de lucro da firma $j$.

# Máximização de lucro com produto único

Se há apenas um produto, o problema de maximização de lucro pode ser expresso como maximizar

$$p_j q_j - \sum_{h=1}^{\ell} w_h z_{j,h},$$

dadas as restrições

$$q_j \leq f_j(\mathbf{z}_j),$$

e

$$\mathbf{z}_j \geq \mathbf{0},$$

no qual $q_j$ é a quantidade líquida de produto da firma $j$, $f_j$ é a função de produção dessa firma, $p_j$ é o preço de seu único produto, $w_h$ é o preço do bem $h$, $z_{j,h}$ é a quantidade líquida do bem $h$ empregada como insumo na produção e $\mathbf{z}_j$ é o vetor dessas quantidades.

# Máximização de lucro com produto único (continuação)

Se os preços do produto e dos insumos são positivos, a firma deve atender à restrição $q_j \leq f_j(\mathbf{z}_j)$ com igualdade. Podemos, então substituir essa restrição na função objetivo, transformando o problema em escolher $z_{j,1}, \ldots, z_{j,\ell}$ de modo a maximizar

$$p_j f(z_{j,1}, \ldots, z_{j,\ell}) - \sum_{h=1}^{\ell} w_h z_{j,h},$$

obedecendo a restrição

$$\mathbf{z}_j \geq \mathbf{0}.$$

As condições de primeira ordem são

$$p_j \frac{\partial f(\mathbf{z}_j^*)}{\partial z_{j,h}} = w_h \quad \text{caso } z_{j,h}^* > 0 \quad \text{e} \quad p_j \frac{\partial f(\mathbf{z}_j^*)}{\partial z_{j,h}} \leq w_h \quad \text{caso } z_{j,h}^* = 0.$$

# Exemplos

Encontre a função de oferta líquida e a função de lucro para a função de transformação abaixo:

$$F(y_1, y_2, y_3) = \max\{0, y_1\}^2 + \max\{0, y_2\}^2 + y_3$$

# Máximização de lucro com produto único: interpretação

$p_j \dfrac{\partial f(\mathbf{z}_j^*)}{\partial z_{j,h}} = w_h$ é condição de igualdade entre o valor do produto marginal do insumo, $p_j \dfrac{\partial f(\mathbf{z}_j^*)}{\partial z_{j,h}}$, e seu preço, $w_h$.

Dividindo dos dois lados por $p_j$, obtemos $\dfrac{\partial f(\mathbf{z}_j^*)}{\partial z_{j,h}} = \dfrac{w_h}{p_j}$, que é a condição de igualdade entre a produtividade marginal do insumo e seu preço expresso em termos de unidades do produto (preço real).

A firma só irá contratar uma quantidade nula de um insumo caso, quando seu emprego é zero, sua produtividade marginal seja menor ou igual ao seu preço real.

# Funções de demanda de insumos, de oferta e de lucro

As funções $z^*_{j,1}(p, \mathbf{w}), \dots, z^*_{j,\ell}(p, \mathbf{w})$ que retornam as soluções do problema de maximização de lucro função dos preços $p$ e $\mathbf{w}$ são chamadas funções de demanda de insumos da firma $j$.

A função

$$q_j(p, \mathbf{w}) = f_j\left(z^*_{j,1}(p, \mathbf{w}), \dots, z^*_{j,\ell}(p, \mathbf{w})\right)$$

é chamada função de oferta da firma $j$.

A função de lucro da firma $j$ também pode ser calculada como

$$\pi(p_{j,\mathbf{w}}) = p_j f_j(p_j, \mathbf{w}) - \mathbf{w}\mathbf{z}_j(p_j, \mathbf{w}).$$

# Exemplos

$$f(z_1, z_2) = z_1^{\frac{1}{4}} z_2^{\frac{1}{4}}$$

$$f(z_1, z_2) = \sqrt{z_1 z_2}$$

# Isolucro

Chamamos conjunto de isolucro associado a um vetor de precos $\mathbf{p}$ e um plano de produção qualquer $\mathbf{y}_j^*$, o conjunto dos planos de produção que geram, aos preços $\mathbf{p}$, o mesmo lucro que o plano de produção $\mathbf{y}_j^*$, ou seja o conjunto

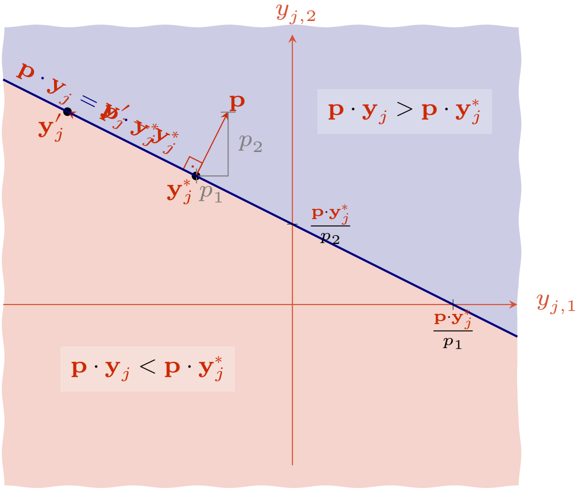
$$\left\{\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^\ell \;\middle|\; \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j^*\right\}.$$

Se $\mathbf{y}_j$ pertence ao conjunto de isolucro associado a $\mathbf{y}_j^*$ e ao vetor de preços $\mathbf{p}$, então

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j^* \Rightarrow \mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_j^*\right) = 0$$

Para que isso ocorra, os vetores $\mathbf{p}$ e $\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_j^*$ precisam ser ortogonais (formar um ângulo reto).

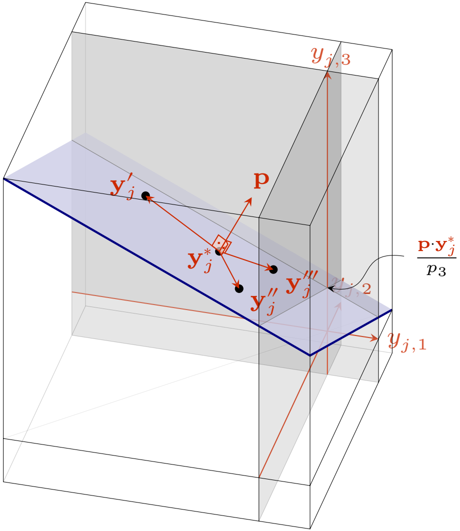
# Linha de isolucro ($\ell = 2$)




No caso em que há apenas dois bens, o conjunto de isolucro associado ao plano de produção $\mathbf{y}_j^*$ corresponde, no plano $y_{j,1} \times y_{j,2}$, à linha reta que passa pelo ponto $\mathbf{y}_j^*$ e forma ângulo reto com o vetor de preços $\mathbf{p}$.

Essa linha divide o plano $y_{j,1} \times y_{j,2}$ em dois semiplanos. No lado dessa linha reta para o qual o vetor de preços aponta estão planos de produção com lucro superior ao do plano $\mathbf{y}_j^*$. No lado oposto encontram-se planos de produção que geram lucro menor ao gerado por $\mathbf{y}_j^*$.

# Isolucro ($\ell = 3$)




No caso de três bens, o conjunto de isolucro associado a $\mathbf{y}_j^*$ é representado graficamente pelo plano que contém $\mathbf{y}_j^*$ e é ortogonal ao vetor de preços.
Tal plano divide o espaço em dois semiespaços. O semiespaço aberto na direção para a qual o vetor de preços aponta contém planos de produção que, aos preços considerados, geram lucro maior do que $\mathbf{y}_j^*$.
Os planos de produção no semiespaço complementar contém planos de produção que geram lucro menor ou igual a $\mathbf{y}_j^*$.

# Isolucro — o caso geral

Generalizando nossa interpretação geométrica, se $\mathbf{y}^*, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^\ell$, e $\mathbf{p} > 0$, dizemos que o conjunto

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^*\}$$

é um hiperplano de $\mathbb{R}^\ell$ e que ele divide esse espaço ($\mathbb{R}^\ell$) em dois semiespaços, o primeiro deles, na direção apontada pelo vetor $\mathbf{p}$,

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^*\}$$

e, o segundo, na direção oposta,

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^*\}.$$

# Condição de lucro máximo e isolucro

Se $\mathbf{y}_j^*$ é o plano de produção que maximiza o lucro da firma $j$ aos preços $\mathbf{p}$, então,

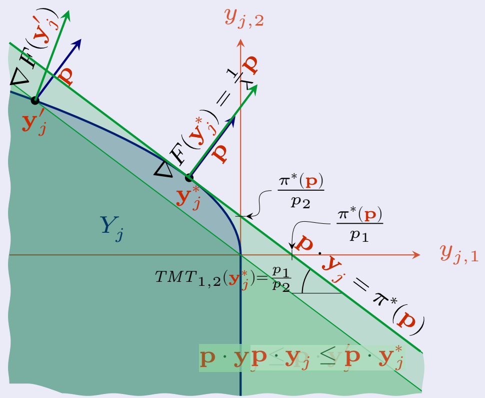
$$\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j^*.$$

Em outras palavras, a solução de lucro máximo, $\mathbf{y}_j^*(\mathbf{p})$ é caracterizada por

$$\mathbf{y}_j^*(\mathbf{p}) \in Y_j \quad \text{e} \quad Y_j \subset \left\{\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^\ell \;\middle|\; \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j^*(\mathbf{p})\right\}.$$

# Interpretação gráfica: o caso de dois bens

## Usando o conjunto de produção

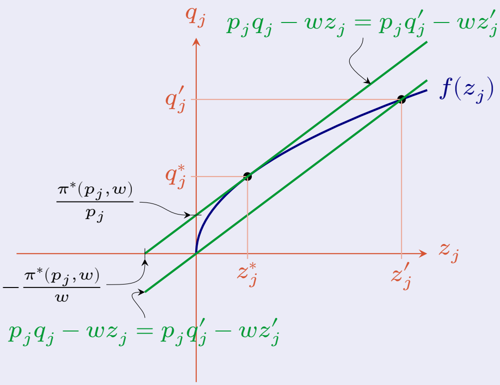



O conjunto de produção possui pontos nos dois semiplanos definidos pela linha de isolucro associada ao vetor de preços $\mathbf{p}$ que passa por $\mathbf{y}'_j$. Logo, $\mathbf{y}'_j$ não é o plano de produção de lucro máximo a esse vetor de precos.

O plano de produção $\mathbf{y}^*_j$ é o plano de lucro máximo pois
$Y_j \subset \left\{\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^\ell \mathbf{y}_j \cdot \mathbf{p} \leq \mathbf{y}^*_j \cdot \mathbf{p}\right\}$.
Note que, nesse ponto, $\mathbf{p}$ e $\nabla F(\mathbf{y}^*_j)$ têm a mesma direção, o que só é possível caso exista $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{p} = \lambda \nabla F(\mathbf{y}^*_j)$, o que é a condição de primeira ordem.

# Interpretação gráfica: o caso de dois bens

**Usando a função de produção**




O gráfico da função de produção é a representação espelhada do trecho eficiente da fronteira de transformação.

Esse gráfico contém pontos acima da linha de isolucro associada ao emprego da quantidade $z_j'$ do insumo e produção de $q_j'$ unidades de produto. Portanto, tal ponto não é de lucro máximo.

O lucro é maximizado quando são empregadas $z_j^*$ unidades de insumo para produzir $q_j^*$ unidades de produto. A curva de isolucro associada a essa escolha tangencia por cima o gráfico da função de produção, o que implica $PMg = \frac{p_1}{p_2}$.

# Interpretação gráfica: fatia com um insumo e um produto

## Fatia do conjunto de produção

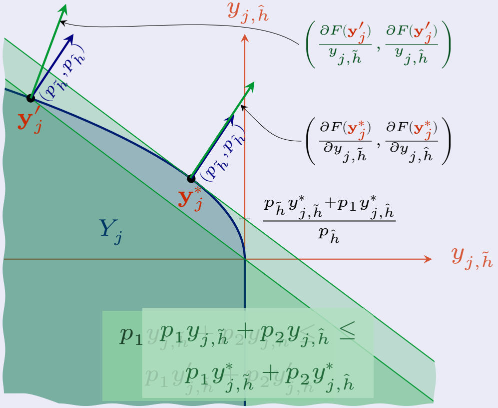



Figura assume $y_{j,h} = y^*_{j,h}$ caso $h \neq \tilde h$ e $h \neq \hat h$.

## Fatia do gráfico da função de produção

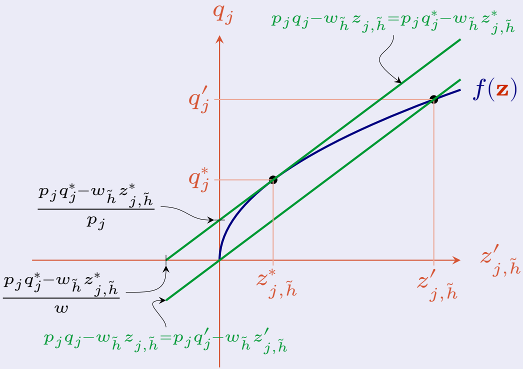



Figura assume $z_{j,h} = z^*_{j,h}$ caso $h \neq \tilde h$.

# Interpretação gráfica: fatia com dois insumos

## Fatia do conjunto de produção

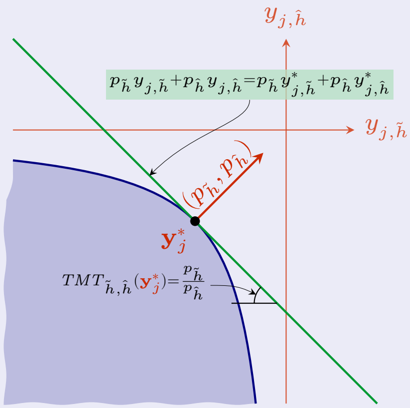



Figura assume $y_{j,h} = y^*_{j,h}$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

## Fatia do gráfico da função de produção

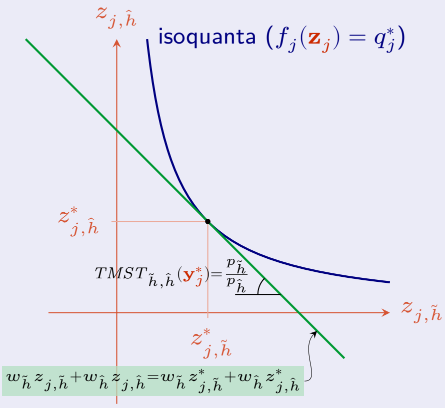
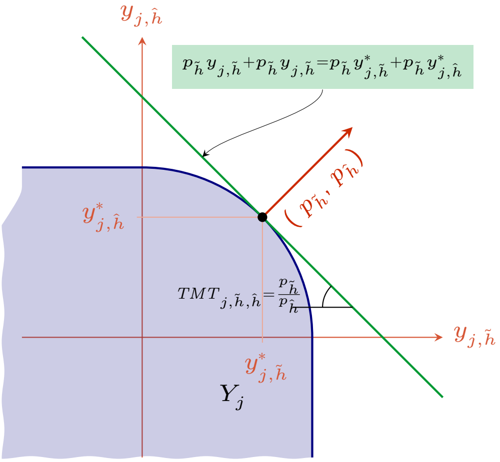



Figura assume $z_{j,h} = z^*_{j,h}$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

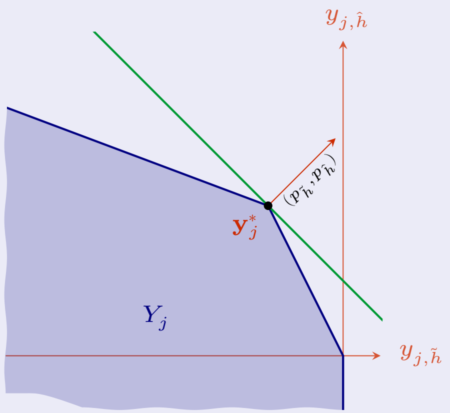
# Interpretação gráfica: fatia com dois produtos



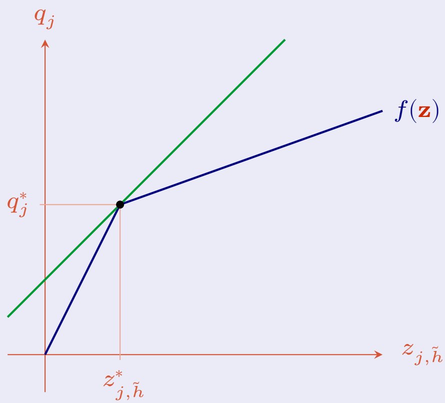

Assume-se que $y_{j,h} = y^*_{j,h}$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

# Casos mal comportados: não diferenciabilidade

## Fatia do conjunto de produção

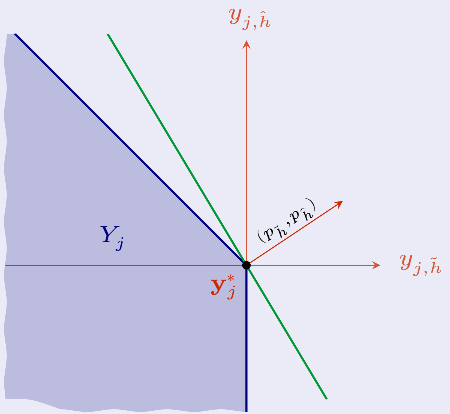



## Fatia do gráfico da função de produção

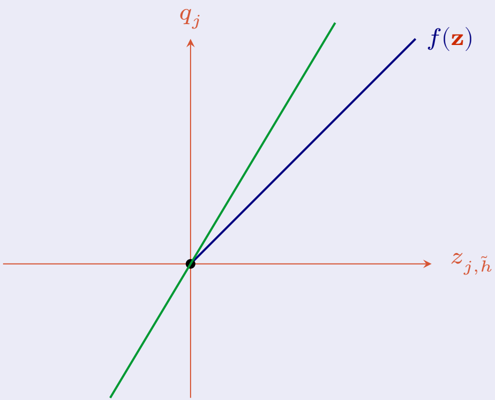


# Casos mal comportados: inatividade

## Fatia do conjunto de produção

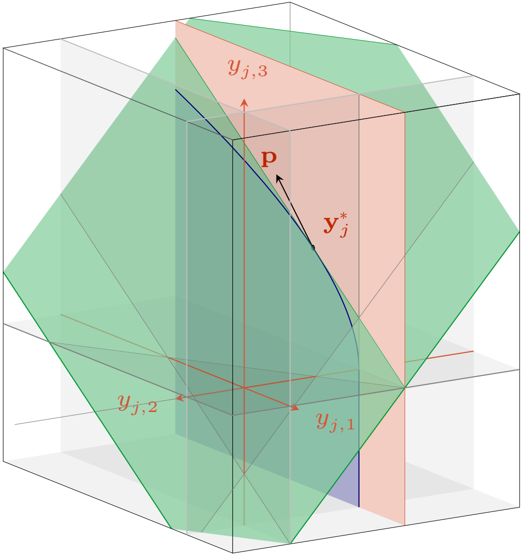



## Fatia da função de produção



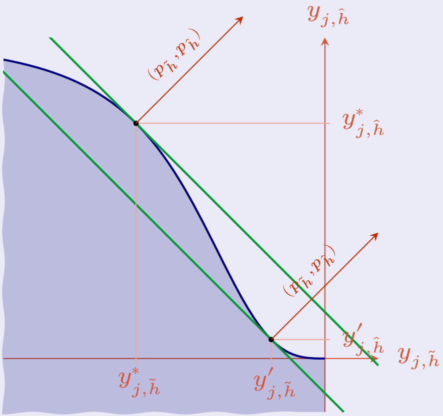

Assume-se que $y_{j,h} = y^*_{j,h}$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

# Casos mal comportados: insumo fixo

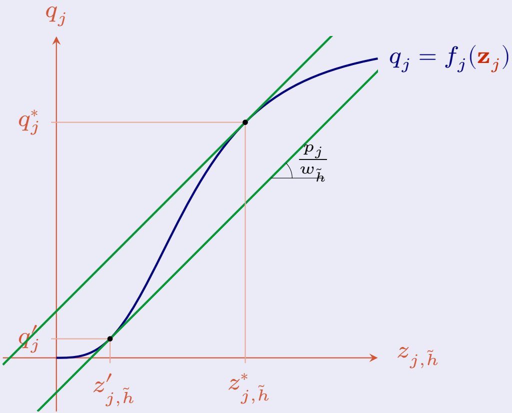


# Casos mal comportados: não convexidade

## Fatia do conjunto de produção

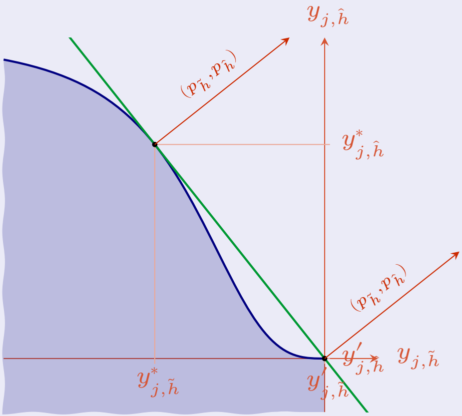



## Fatia da função de produção

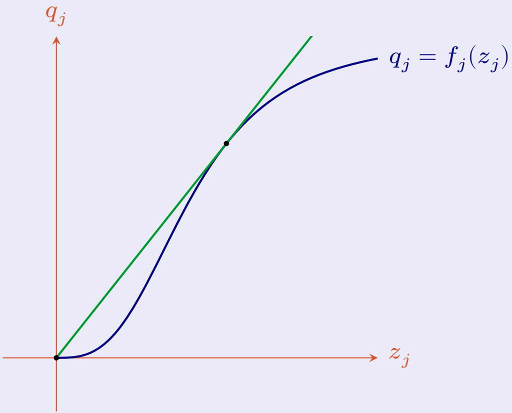


# Casos mal comportados: múltiplos equilíbrios

## Fatia do conjunto de produção



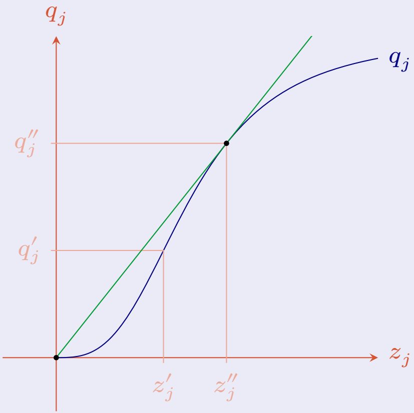

## Fatia do gráfico da função de produção



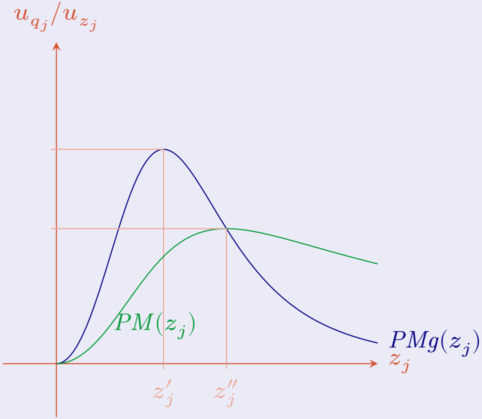
# Casos mal comportados: ausência de solução

# Curvas de produtividade de um insumo único

## Função de produção




## Produtividades unitárias



# Relação entre produtividades média e marginal

$$\frac{dPM(\mathbf{z})}{dz_h} = \frac{d}{dz_h}\frac{f(\mathbf{z})}{z_h} = \frac{z_h\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h} - f(\mathbf{z})}{{z_h}^2}$$
$$= \frac{\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h} - \frac{f(\mathbf{z})}{z_h}}{z_h} = \frac{PMg_h(\mathbf{z}) - PM_h(\mathbf{z})}{z_h}$$

Portanto, $PM(\mathbf{z})$ é crescente, decrescente ou máximo ou mínimo ou ponto de sela em relação a $z_h$ se, e somente se, respectivamente, $PMg_h(\mathbf{z}) > PM_h(\mathbf{z})$, $PMg_h(\mathbf{z}) < PM_h(\mathbf{z})$, ou $PMg_h(\mathbf{z}) = PM_h(\mathbf{z})$.

# Relação entre produtividades média e marginal na origem

Se $f(z_1, \dots, z_{h-1}, 0, z_{h+1}, \dots z_\ell) = 0$, então

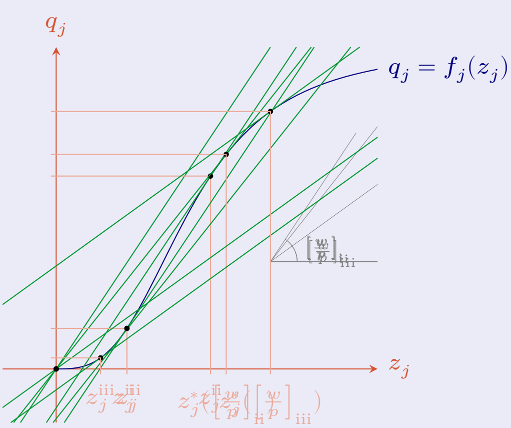
$$PM(\mathbf{z}) = \frac{f(z_1, \dots, z_{h-1}, z_h, z_{h+1}, \dots z_\ell) - f(z_1, \dots, z_{h-1}, 0, z_{h+1}, \dots z_\ell)}{z_h - 0}$$

e, portanto

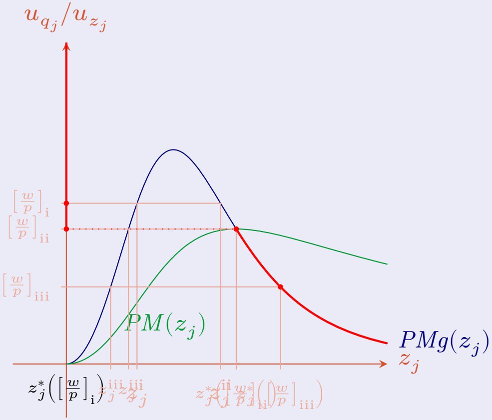
$$\begin{aligned}\lim_{z_h \to 0} PM(\mathbf{z}) &= \lim_{z_h \to 0} \frac{f(z_1, \dots, z_{h-1}, 0 + z_h, z_{h+1}, \dots z_\ell) - f(z_1, \dots, z_{h-1}, 0, z_{h+1}, \dots z_\ell)}{z_h - 0} \\ &= PMg(z_1, \dots, z_{h-1}, 0, z_{h+1}, \dots z_\ell)\end{aligned}$$

# Curva de demanda de um insumo único

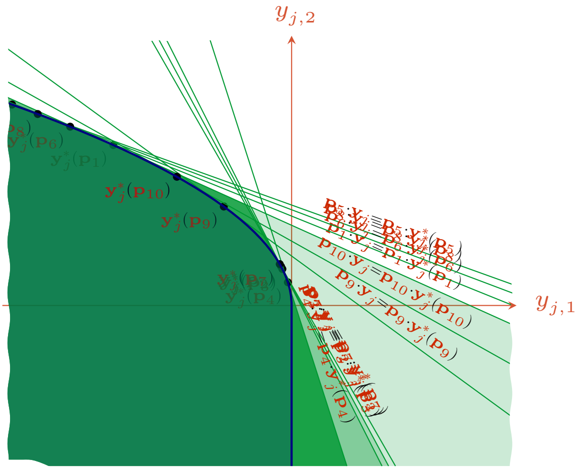
## Função de produção




## Produtividades unitárias



# Inferindo o conjunto de produção




Seja $P$ o domínio da função de oferta. Se $Y_j$ é convexo, então,

$$Y_j = \bigcap_{\mathbf{p} \in P} \{\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^\ell : \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j^*(\mathbf{p})\}$$

# Propriedades

## Homogeneidade

$\mathbf{y}_j^*(\mathbf{p})$ é homogênea de grau zero e $\pi(\mathbf{p})$ é homogênea de grau 1, ou seja,

$$\forall \alpha > 0, \mathbf{y}_j^*(\alpha \mathbf{p}) = \mathbf{y}_j^*(\mathbf{p}) \quad \text{e} \quad \pi^*(\alpha \mathbf{p}) = \alpha \pi^*(\mathbf{p})$$

## Lei da oferta

$$\left[\mathbf{y}_j^*(\mathbf{p}') - \mathbf{y}_j^*(\mathbf{p}'')\right] \cdot (\mathbf{p}' - \mathbf{p}'') \leq 0$$

## Convexidade da função de lucro

$$\forall 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \pi_j^* \left[\alpha \mathbf{p}' + (1-\alpha)\mathbf{p}''\right] \leq \alpha \pi_j^* \left(\mathbf{p}'\right) + (1-\alpha)\pi_j^* \left(\mathbf{p}''\right)$$

## Lema de Hotteling

$$\nabla \pi_j^*(\mathbf{p}) = \mathbf{y}_j^*(\mathbf{p})$$